

УДК: 534.1
OECD: 01.03.AA

Локализованные моды в системе из акустических резонаторных пар с топологическими дефектами

Быков Н.В.^{1*}, Власова Н.С.², Минина О.В.³

¹Д.т.н., доцент, заведующий кафедрой,

²К.т.н., доцент, ³К.ф.-м.н., доцент

^{1,2,3}Кафедра «Физика», Российский университет транспорта (РУТ-МИИТ),
г. Москва, РФ

Аннотация

В работе рассматривается одномерная модель акустической цепочки, описываемой аналогом SSH-модели, состоящей из связанных резонаторов с чередующимися коэффициентами связи. Проведено численное моделирование колебаний в конечной и кольцевой конфигурациях цепочки. Особое внимание уделено изучению локализованных мод, возникающих при наличии краевых состояний, точечных и двойных дефектов. Анализ собственных значений и векторов матрицы системы позволил выделить моды, лежащие в запрещённой зоне и характеризующиеся пространственной локализацией. Также рассмотрено влияние параметров связи на ширину запрещённой зоны и локализационные свойства мод. Показано, что предложенные структуры могут служить акустическим аналогом топологических изоляторов, а дефекты в структуре позволяют управлять частотной селективностью и пространственным распределением мод. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании акустических фильтров и сенсорных систем.

Ключевые слова: топологическая акустика, локализованные моды, акустические дефекты, резонаторные цепочки, запрещённая зона, топологические изоляторы

Localized Modes in a System of Acoustic Resonator Pairs with Topological Defects

Bykov N.V.^{1*}, Vlasova N.S.², Minina O.V.³

¹DSc, associate professor, head of department,

^{2,3}Ph.D., associate professor

^{1,2,3}Department of physics, Russian University of Transport, RUT-MIIT, Moscow, Russia

Abstract

A one-dimensional model of an acoustic resonator chain is considered, representing an acoustic analogue of the Su–Schrieffer–Heeger (SSH) model, where resonators are coupled with alternating coupling strengths. Numerical simulations of oscillations are performed for both finite and ring-shaped configurations of the chain. Special attention is paid to the study of localized modes that arise due to edge states, point defects, and paired (double) topological defects. Analysis of the eigenvalues and eigenvectors of the system matrix reveals modes lying within the bandgap and exhibiting spatial localization. The influence of coupling parameters on the bandgap width and localization properties is investigated. It is shown that the proposed structure can serve as an acoustic analogue of a topological insulator, while the introduction of structural defects allows control over

*E-mail: nik.bkv@gmail.com (Быков Н.В.)

frequency selectivity and spatial distribution of the modes. The results may find applications in the design of acoustic filters and sensing systems.

Keywords: *topological acoustics, localized modes, acoustic defects, resonator chains, bandgap, topological insulators*

Введение

В последние десятилетия активное развитие получили исследования в области топологических фаз вещества и связанных с ними краевых состояний [1]-[2]. Изначально обнаруженные в твёрдотельных системах, топологические эффекты были успешно реализованы в других областях – оптике [3]-[6], электронике [7]-[8] механике и акустике [9]-[11]. Особый интерес представляют топологические изоляторы – системы, обладающие изолирующим объемом, но допускающие передачу энергии вдоль краевых или дефектных каналов за счёт топологически защищённых локализованных состояний. Такие моды устойчивы к локальным нарушениям симметрии и не исчезают при умеренных искажениях параметров, что делает их перспективными для направленной передачи сигналов, фильтрации и сенсорных приложений.

Одной из простейших моделей, демонстрирующих топологические переходы, является модель Сю-Шриффера-Хиггера (SSH-модель) [12]. Она описывает одномерную цепочку из чередующихся узлов двух типов (А и В), связанных поочерёдно сильными и слабыми связями. В зависимости от порядка димеризации и отношения параметров связи система может находиться в топологически тривиальной или нетривиальной фазе. При открытых краях в топологически нетривиальной фазе возникают краевые моды, локализованные вблизи концов цепочки и имеющие частоты, лежащие в запрещённой зоне [13]-[14].

Акустические реализации SSH-модели широко используются в виде цепочек акустических резонаторов, соединённых каналами различной длины, ширины или формы [15]-[18]. Такие структуры создаются как в воздушной, так и в жидкой среде, а также в твёрдых материалах – путём перфорации пластин, размещения трубок или камер. Также для этих целей используются метаматериалы [19]. Роль узлов SSH-цепочки играют акустические полости, а роль связей – акустические каналы с заданной проницаемостью.

Топологически локализованные моды представляют собой колебательные состояния, энергия которых сосредоточена вблизи краёв или дефектов структуры и экспоненциально убывает вглубь системы. В отличие от нелинейной локализации, связанной с усилением колебаний за счёт нелинейных эффектов (например, образования солитонов или дискретных бризеров), топологическая локализация возникает в линейных системах и определяется исключительно геометрией и симметрией структуры. Она обусловлена глобальными топологическими характеристиками гамильтониана и не зависит от начальных условий или амплитуды возбуждения. Такие моды проявляются в запрещённой зоне спектра и обладают устойчивостью к широкому классу возмущений, включая слабые неоднородности и вариации параметров, что делает их особенно интересными для практического применения в линейных средах.

Ширина локализации моды ξ может быть количественно охарактеризована экспоненциальным затуханием амплитуды:

$$|A_n| \sim e^{-\Delta n/\xi},$$

где A_n – амплитуда колебаний в резонаторе с номером n ; Δn – расстояние

(в количестве резонаторов) от места локализации.

Целью настоящей работы является численное исследование колебательных мод в конечной и кольцевой акустической SSH-цепочке с чередующимися коэффициентами связи. Особое внимание уделяется изучению локализованных мод, возникающих на краях цепи, а также дефектных мод, обусловленных нарушением порядка димеризации или вставкой лишних узлов. Близкая постановка была ранее рассмотрена в оптическом контексте для димерной цепочки волноводов [20].

Результаты данной работы могут быть использованы при разработке акустических фильтров, устойчивых к локальным дефектам, а также при создании управляемых резонансных структур на основе топологических принципов.

1 Модель акустической SSH-цепочки из резонаторов

Рассматривается одномерная дискретная цепочка, состоящая из N резонаторных пар (РП), каждая из которых включает два акустических резонатора (узлы типа А и В), соединённых каналами, обеспечивающими звуковую связь. Резонаторы А и В сами по себе идентичны, отличаются они только структурой связей с соседними резонаторами. Модель основана на акустическом аналоге SSH-цепочки и учитывает чередование сильной и слабой связи между элементами.

В данной работе рассматривается только линейный режим, а взаимодействие между резонаторами моделируется с помощью эффективных коэффициентов связи. На рисунке 1 показана физическая схема и схематическое изображение системы, на которой символами v и w обозначены нормированные коэффициенты связи между резонаторами. В работе [15] использовалась схожая система, представляющая собой последовательность цилиндрических резонаторов радиусом 1,6 см и высотой 8 см каждый, обеспечивающих резонансную частоту 4027 Гц. Резонаторы также могут иметь и иную, например сферическую, форму. Другой предельный случай этой системы для распределённых параметров был рассмотрен в работе [21], где при других условиях также показано формирование запрещённой зоны. Однако, в рассматриваемом нами случае решается задача с сосредоточенными параметрами. Необходимо также отметить, что в схеме резонаторы могут быть заменены на волноводы, тогда полученные результаты соответствуют частотам в окрестности нулевого значения волнового вектора.

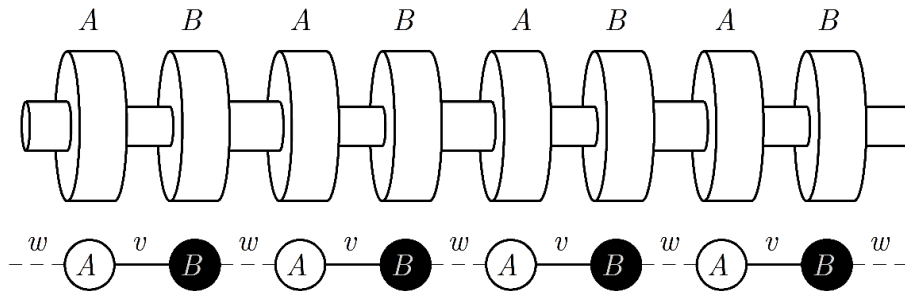


Рисунок 1 – Физическое (вверху) и схематичное (внизу) изображение акустической цепочки резонаторных пар

В рамках одномерной модели система описывается Гамильтонианом вида [22]:

$$H = v \sum_{n=1}^N |n, B\rangle \langle n, A| + w \sum_{n=1}^N |n+1, A\rangle \langle n, B| + \text{h.c.}, \quad (1)$$

где H – матрица взаимодействий (гамильтониан); v, w – безразмерные константы

взаимодействия между резонаторами внутри ячейки и в соседних ячейках соответственно; запись $|n, A\rangle$ означает нормированную амплитуду давления в резонаторе A ячейки n ; $\langle n, A|$ – эрмитово сопряженный вектор к $|n, A\rangle$; $h.c.$ означает эрмитово сопряжение (учет обратных волн).

В матричной форме гамильтониан для ограниченной цепочки имеет блочно-трёхдиагональный вид размера $2N \times 2N$:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & v & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ v & 0 & w & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w & 0 & v & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

При $w > v$ система находится в топологически нетривиальной фазе, что приводит к возникновению краевых состояний, локализованных на концах цепочки. Эти моды имеют частоту, лежащую в запрещённой зоне между двумя акустическими полосами.

Применение стандартного формализма к Гамильтониану позволяет получить дифференциальные уравнения для нормированных амплитуд давлений в ячейке:

$$i \frac{dA_n}{dt} + vB_n + wB_{n-1} = 0, \quad (3)$$

$$i \frac{dB_n}{dt} + vA_n + wA_{n+1} = 0, \quad (4)$$

где i – мнимая единица, A_n и B_n обозначают нормированные отклонения давления в резонаторах A и B ячейки с номером n .

Система (3)-(4) в случае строгой периодичности может быть записана через блоховский гамильтониан [23]:

$$H_B = \begin{bmatrix} 0 & v + we^{-iq} \\ v + we^{iq} & 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где q – постоянная распространения между резонаторами.

Основное известное свойство SSH цепочки вида (3)-(4) состоит в наличии запрещенной зоны частот для линейных волн. Так, подстановка решения в виде линейных волн типа $F_n = F_0 e^{i(qn - \omega t)}$, где F_0 это либо A_0 , либо B_0 , приводит к закону дисперсии

$$\omega^2 = v^2 + w^2 + 2vw \cos q. \quad (6)$$

Отсюда видно, что вблизи нуля имеется запрещенная зона частот, ширина которой зависит от соотношения констант связи. Существенно, что щель в спектре закрывается в случае одинаковых связей ($w = v$).

В Фурье пространстве уравнения (3)-(4) сводятся к задаче на определение собственных значений и собственных векторов

$$H\mathbf{x} = -\omega\mathbf{x}, \quad (7)$$

где $\mathbf{x} = [A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_N, B_N]^T$ – вектор амплитуд; ω – собственные частоты системы; H – гамильтониан типа (2).

2 Топологические структуры из акустических резонаторов

В этом разделе приведены численные результаты, демонстрирующие формирование краевых мод в топологически нетривиальной фазе, а также локализованные дефектные состояния для различных пространственных конфигураций акустических резонаторов.

Для численного анализа каждой пространственной конфигурации использовался следующий алгоритм:

- формируется матрица H размерности $2N \times 2N$, соответствующая конфигурации системы;
- численно рассчитываются собственные значения и собственные векторы в задаче (7);
- выбираются собственные значения (частоты), расположенные вблизи нуля, и анализируется соответствующее пространственное распределение амплитуд;
- для визуализации строятся графики спектра и локализации мод.

Для численного анализа используется $N = 40$ РП. Нормированные коэффициенты связи приняты равными: $v = 0,5$ и $w = 1,0$, что соответствует топологически нетривиальной фазе.

2.1 Кольцо и конечная цепочка, состоящие из резонаторных пар

Сначала рассмотрим базовый случай – замкнутую в кольцо цепочку из N РП (рисунок 2). В этом случае ставятся граничные условия периодичности $A_{N+1} = A_1$, $B_{-1} = B_N$, которые приводят к появлению ненулевых значений на краях побочной диагонали матрицы.

В этом случае также легко продемонстрировать наличие запрещенной зоны, если искать решение в виде

$$F_n = e^{-i\omega t} \sum_{s=1}^N f_s e^{i \frac{2\pi n s}{N}}.$$

Подстановка этого решения в (3)-(4) с учетом граничных условий периодичности приводит дискретному аналогу соотношения (6):

$$\omega_s^2 = v^2 + w^2 + 2vw \cos \frac{2\pi s}{N}.$$

Спектр нормированных частот и нормированные собственные моды такой системы показаны на рисунке 3. Как видно из рисунка, спектр содержит область запрещенных частот, а моды равномерно распределены по всем резонаторам, что означает отсутствие локализованных мод (на рисунке обе моды совпадают).

Теперь рассмотрим конечную одномерную цепочку из N РП. В этом случае РП вдали от краев описываются парой уравнений (3) и (4), а в крайних уравнениях следует положить $B_{-1} = 0$ и $A_{N+1} = 0$. Гамильтониан при этом имеет вид (2). Аналогичная рисунку 3 картина нормированных частот и мод для этого случая приведена на рисунке 4.

Эта ситуация существенно отличается от предыдущей: в частотном спектре появляются две моды с частотой $\omega \approx 0$, что является признаком локализованных мод. Наличие этих мод подтверждает график собственных значений системы. При этом следует отметить, что номер уровня на графике частот соответствует просто порядковому номеру частоты в ряду упорядоченных по возрастанию частот, а на графике мод номер узла соответствует конкретному положению резонатора в схеме – в данном случае номера 0 и 79 являются краевыми резонаторами.

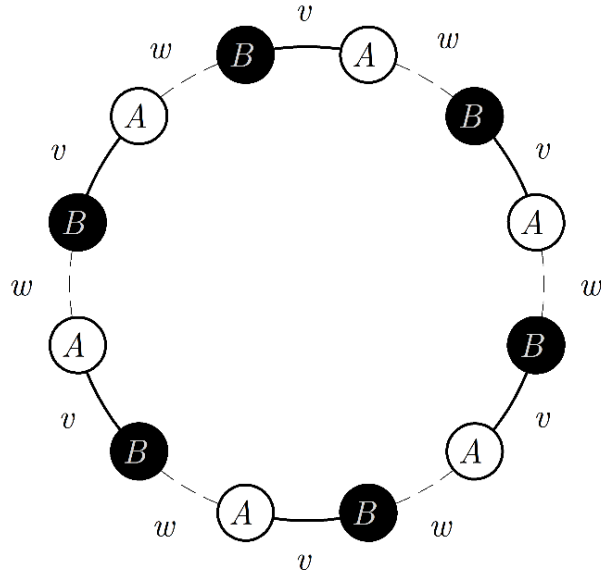


Рисунок 2 – Кольцевая структура, состоящая из РП

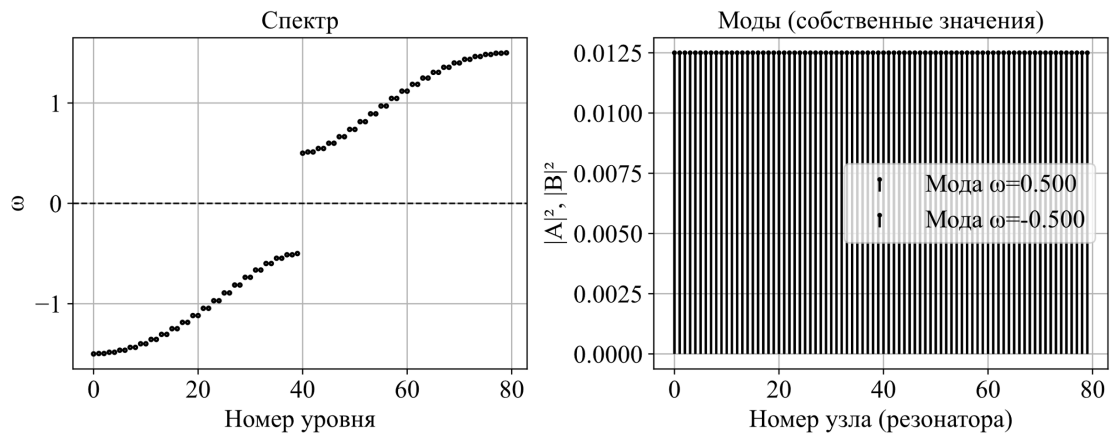


Рисунок 3 – Нормированные собственные частоты и моды замкнутой кольцевой цепочки из резонаторных пар

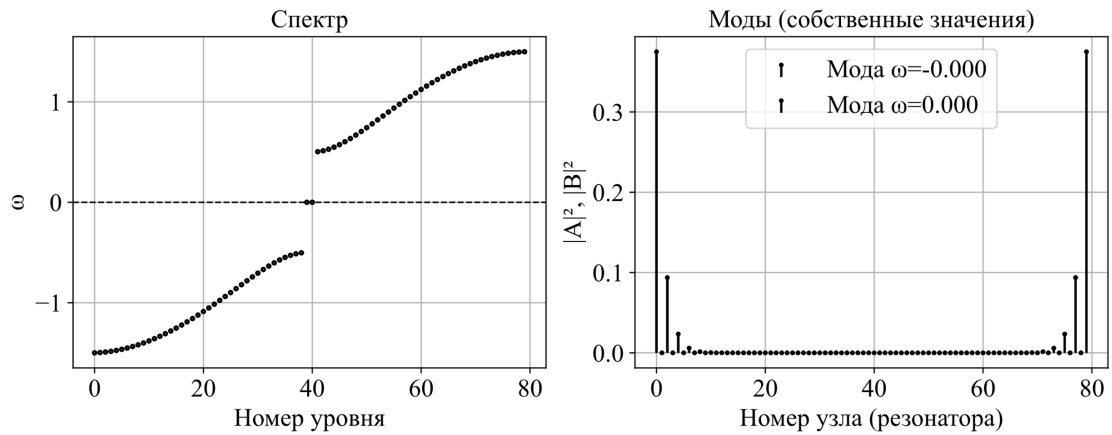


Рисунок 4 – Нормированные собственные частоты и моды конечной цепочки из РП

2.2 Точечный дефект внутри кольца из резонаторных пар

Теперь рассмотрим кольцевую структуру, но с внесением топологических дефектов. Сначала рассмотрим точечный дефект, соответствующий случаю замены волновода А на волновод В в одной из РП (рисунок 5). Коэффициент связи между волноводами типа $B-B$ обозначим r .

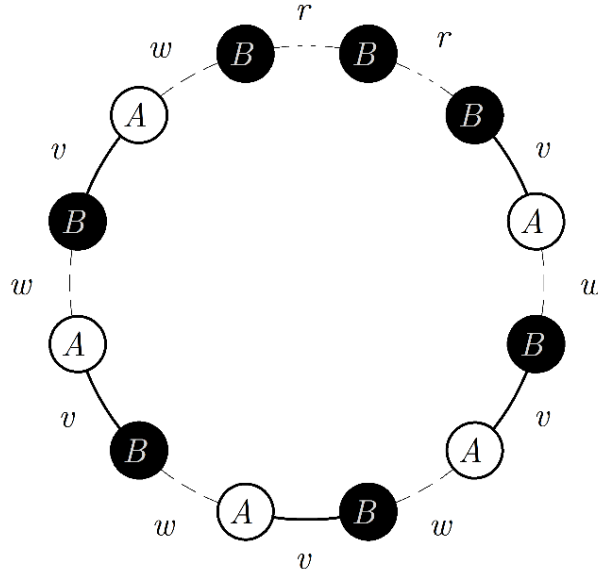


Рисунок 5 – Схема расположения точечного дефекта в кольце из РП

Например, если установить $r = v$, результат показан на рисунке 6. Наблюдается локализованная на дефекте мода. При этом частота находится в запрещенной зоне, но достаточно далека от нулевой.

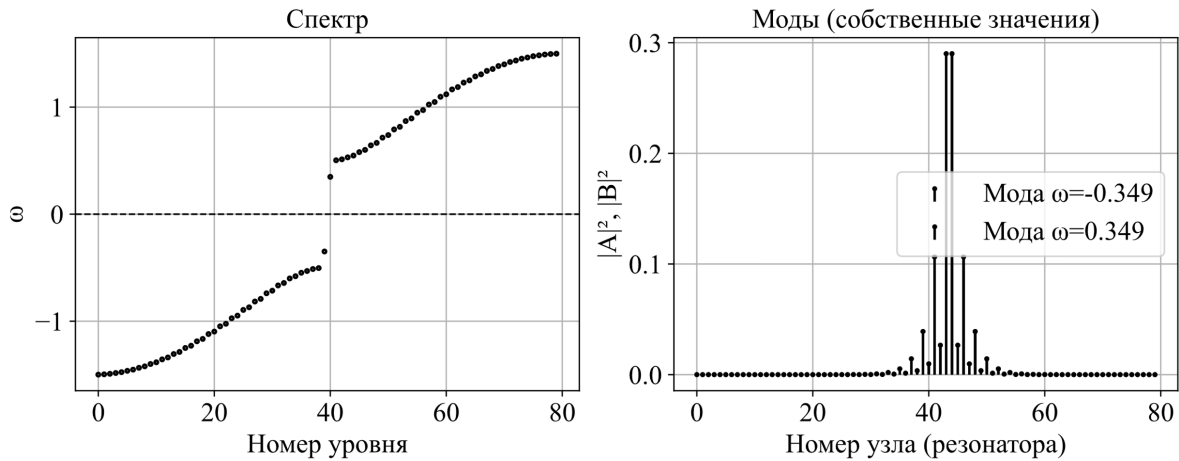


Рисунок 6 – Нормированные собственные частоты и моды кольцевой цепочки из резонаторов с точечным дефектом

Ослабление связи r приводит к уменьшению длины локализации и уменьшению соответствующей частоты. Так, при $r = 0,1(v + w)$ картина собственных частот и мод показана на рисунке 7.

В пределе бесконечно слабой связи, $r \rightarrow 0$, очевидно, получим конечную цепочку (см. рисунок 4).

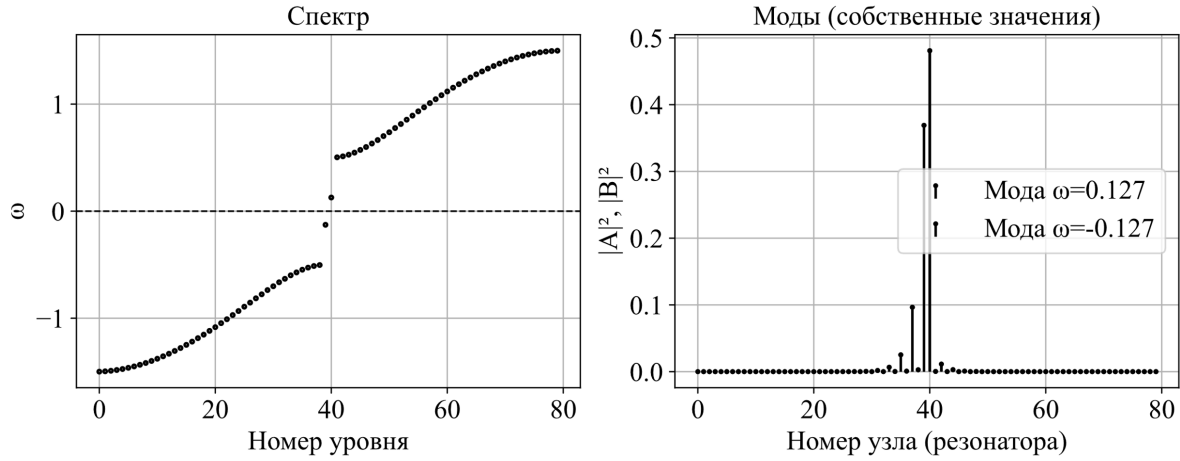


Рисунок 7 – Нормированные собственные частоты и моды кольцевой цепочки из РП с точечным дефектом при $r = 0,1(v + w)$

2.3 Дефект нарушение симметрии в кольце из резонаторных пар

Рассмотрим теперь парный дефект нарушения симметрии в цепочке из РП. Соединим между собой две цепочки вида

$$\begin{aligned} A - B - A - B - A - B - \dots - A - B - A - B, \\ B - A - B - A - B - A - \dots - B - A - B - A \end{aligned}$$

В результате образуется кольцо с двумя местами соединений, изображенное на рисунке 8. Коэффициенты связи в местах соединений обозначим r_A и r_B .

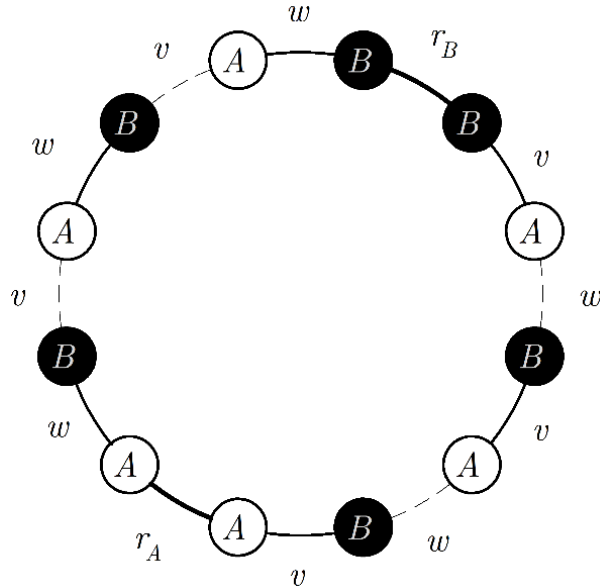


Рисунок 8 – Кольцо из РП с нарушением симметрии

По сути, вторая цепочка представляет собой инверсию первой и поэтому если одна цепочка находится в топологически нетривиальной фазе, то вторая автоматически – в топологически тривиальной фазе. Мы рассмотрим ситуацию, когда обе половины содержат по 20 РП. Для $r_A = r_B = v$ решение изображено на рисунке 9.

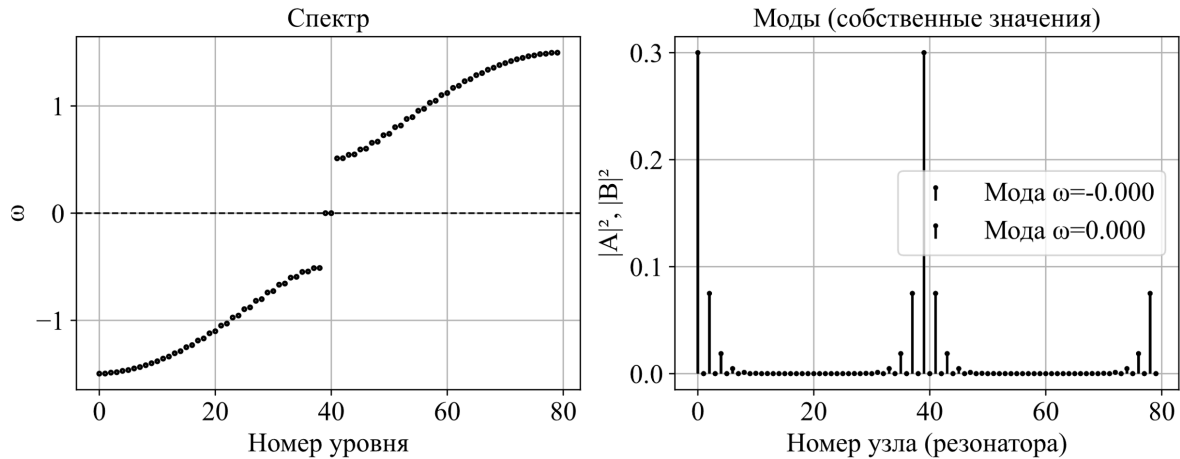


Рисунок 9 – Нормированные собственные частоты и моды кольцевой цепочки из резонаторов с дефектом

В этом случае образуются классические локализованные моды с $\omega \approx 0$, причем локализованы они строго на дефектах (номера узлов 0 и 40).

Заключение

В работе проведено численное исследование одномерной акустической цепочки, представляющей собой реализацию SSH-модели в виде системы связанных резонаторов с чередующимися коэффициентами связи. Показано, что при подходящем соотношении параметров связи в такой цепочке формируется запрещённая зона, внутри которой могут существовать локализованные моды.

В конфигурации с открытыми краями в топологически нетривиальной фазе возникают краевые моды, частоты которых лежат внутри запрещённой зоны и характеризуются экспоненциальной локализацией. В кольцевых структурах при наличии топологических дефектов, возникающих из-за нарушения порядка димеризации или замены узлов, формируются дефектные моды с аналогичными свойствами. Их наличие и пространственная структура подтверждены анализом собственных векторов и спектров системы.

Показано, что варьирование коэффициентов связи позволяет управлять шириной запрещённой зоны и степенью локализации мод, что открывает возможности для проектирования устойчивых к искажениям акустических фильтров и сенсорных устройств. Полученные результаты могут быть полезны при создании резонансных структур с заданными частотными характеристиками и топологической защитой.

Благодарности. Исследование выполнено за счет бюджетного финансирования в рамках работ по проведению прикладных научных исследований по государственному заданию от 20.03.2025 № 103-00001-25-02 (шифр 5).

Постановка этой задачи возникла из плодотворных обсуждений Н.В.Б. с профессором А.И. Маймистовым (1951–2022).

Список использованных источников

1. Карташов Я.В., Иванов С.К., Жанг Й.Ч. [и др.] Эксперименты с нелинейными топологическими состояниями в статических и динамически модулированных массивах

Су-Шриффера-Хигера // Успехи физических наук. 2024. Т. 194. № 11. С. 1159–1176. DOI: UFNr.2024.08.039740.

2. Kang J., Wei R., Zhang Q., Dong, G. Topological Photonic States in Waveguide Arrays // Adv. Phys. Res. 2023. No. 2. P. 2200053. DOI: 10.1002/apxr.202200053.

3. Smirnova D., Leykam D. Chong Y., Kivshar Yu. Nonlinear topological photonics featured // Appl. Phys. Rev. 2020. Vol. 7. P. 021306. DOI: 10.1063/1.5142397.

4. Szameit A., Rechtsman M.C. Discrete nonlinear topological photonics // Nat. Phys. 2024. Vol. 20. P. 905. DOI: 10.1038/s41567-024-02454-8.

5. Ota Y., Takata K., Ozawa T. [et al.] Active topological photonics // Nanophotonics. 2020. Vol. 9. No. 3. P. 547–567. DOI: 10.1515/nanoph-2019-0376.

6. Tan D.T.H. Topological silicon photonics // Adv. Photonics Res. 2021. Vol. 2. Iss. 9. P. 2100010. DOI: 10.1002/adpr.202100010.

7. Kim E., Yang J. Wave propagation in single column woodpile phononic crystals: Formation of tunable band gaps // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2014. Vol. 71. P. 33-45. DOI: 10.1016/j.jmps.2014.06.012.

8. Sen S., Hong J., Bang J. [et al.] Solitary waves in the granular chain // Physics Reports. 2008. Vol. 462. No. 2. P. 21-66. DOI: 10.1016/j.physrep.2007.10.007.

9. Rachel S. Interacting topological insulators: a review // Rep. Prog. Phys. 2018. Vol. 81. P. 116501. DOI: 10.1088/1361-6633/aad6a6.

10. Esmann M., Lamberti F.R., Lemaître A., Lanzillotti-Kimura N.D. Topological acoustics in coupled nanocavity arrays // Phys. Rev. B. 2018. Vol. 113, № 20. P. 161109. DOI: 10.1103/PhysRevB.98.161109.

11. Li X., Meng Y., Wu X. [et al.] Su-Schrieffer-Heeger model inspired acoustic interface states and edge states // Appl. Phys. Lett. 2018. Vol. 113, № 20. P. 203501. DOI: 10.1063/1.5051523.

12. Su W.P., Schrieffer J.R., Heeger A.J. Solitons in Polyacetylene // Phys. Rev. Lett. 1979. № 42. P. 1698–1701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.42.1698.

13. Hofstrand A., Li H., Weinstein M.I. Discrete Breathers of Nonlinear Dimer Lattices: Bridging the Anti-continuous and Continuous Limits // J. Nonlinear Sci. 2023. Vol. 33, No. 4. P. 1–44. DOI: 10.1007/s00332-023-09909-x.

14. S. Q. Shen. Topological insulators: Dirac equation in condensed matter. 2nd ed. Springer, 2017. 279 p. ISBN 978-981-10-4605-6. DOI: 10.1007/978-981-10-4606-3

15. Guo T., Cao L., Assouar B. [et al.] Acoustic Su-Schrieffer-Heeger chain with phase nonreciprocal couplings // J. Appl. Phys. AIP Publishing LLC, 2025. Vol. 137, no. 15. DOI: 10.1063/5.0254537.

16. He C., Ni X., Ge H. [et al.] Acoustic topological insulator and robust one-way sound transport // Nat. Phys. 2016. Vol. 12, № 12. P. 1124–1129. DOI: 10.1038/nphys3867.

17. Xue H., Yang Y., Gao F. [et al.] Acoustic higher-order topological insulator on a kagome lattice // Nat. Mater. Springer US, 2019. Vol. 18, no 2. P. 108–112. DOI: 10.1038/s41563-018-0251-x.

18. Apigo D.J., Cheng W., Dobiszewski K.F. [et al.] Observation of Topological Edge Modes in a Quasiperiodic Acoustic Waveguide // Phys. Rev. Lett. American Physical Society, 2019. Vol. 122, No 9. P. 95501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.095501.

19. Guo P.-Y., Wang L.-W., Li W. [et al.] Multiband topology in acoustic coupled Su-Schrieffer-Heeger chains // Phys. Rev. Applied. 2024. Vol. 22. P. 054079. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.22.054079.

20. Быков Н.В. Моделирование распространения электромагнитных волн в кольцевой бинарной цепочке волноводов // Материалы XXIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным

системам (ВМСППС2023). М.: 2023. С. 30-32. ISBN: 978-5-4316-1054-7.

21. Быков Н.В. Нахождение запрещенных зон распространения звуковых волн в гофрированных трубках методом определения устойчивости решения // *Noise Theory and Practice*. 2023. Т. 9. № 2 (33). С. 12-18.

22. Kvande C.I., Hill D. B., Blume D. Finite Su-Schrieffer-Heeger chains coupled to a two-level emitter: Hybridization of edge and emitter states // *Phys. Rev. A*. 2023. Vol. 108, No. 2, P. 023703. DOI: 10.1103/PhysRevA.108.023703.

23. Song W., Sun W., Chen C. [et al.] Robust and Broadband Optical Coupling by Topological Waveguide Arrays // *Laser & Photonics Reviews*. 2020 14(2):1900193.

References

1. Kartashov Y.V., Ivanov S.K., Zhang Y.Q. [et al.] Experiments with nonlinear topological edge states in static and dynamically modulated Su-Schrieffer-Heeger arrays // *Physics – Uspekhi*. 2024. Vol. 67. No. 11. P. 1095–1110. DOI: 10.3367/UFNe.2024.08.039740.

2. Kang J., Wei R., Zhang Q., Dong, G. Topological Photonic States in Waveguide Arrays // *Adv. Phys. Res.* 2023. No. 2. P. 2200053. DOI: 10.1002/apxr.202200053.

3. Smirnova D., Leykam D. Chong Y., Kivshar Yu. Nonlinear topological photonics featured // *Appl. Phys. Rev.* 2020. Vol. 7. P. 021306. DOI: 10.1063/1.5142397.

4. Szameit A., Rechtsman M.C. Discrete nonlinear topological photonics // *Nat. Phys.* 2024. Vol. 20. P. 905. DOI: 10.1038/s41567-024-02454-8.

5. Ota Y., Takata K., Ozawa T. [et al.] Active topological photonics // *Nanophotonics*. 2020. Vol. 9. No. 3. P. 547–567. DOI: 10.1515/nanoph-2019-0376.

6. Tan D.T.H. Topological silicon photonics // *Adv. Photonics Res.* 2021. Vol. 2. Iss. 9. P. 2100010. DOI: 10.1002/adpr.202100010.

7. Kim E., Yang J. Wave propagation in single column woodpile phononic crystals: Formation of tunable band gaps // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2014. Vol. 71. P. 33-45. DOI: 10.1016/j.jmps.2014.06.012.

8. Sen S., Hong J., Bang J. [et al.] Solitary waves in the granular chain // *Physics Reports*. 2008. Vol. 462. No. 2. P. 21-66. DOI: 10.1016/j.physrep.2007.10.007.

9. Rachel S. Interacting topological insulators: a review // *Rep. Prog. Phys.* 2018. Vol. 81. P. 116501. DOI: 10.1088/1361-6633/aad6a6.

10. Esmann M., Lamberti F.R., Lemaitre A., Lanzillotti-Kimura N.D. Topological acoustics in coupled nanocavity arrays // *Phys. Rev. B*. 2018. Vol. 113, № 20. P. 161109. DOI: 10.1103/PhysRevB.98.161109.

11. Li X., Meng Y., Wu X. [et al.] Su-Schrieffer-Heeger model inspired acoustic interface states and edge states // *Appl. Phys. Lett.* 2018. Vol. 113, № 20. P. 203501. DOI: 10.1063/1.5051523.

12. Su W.P., Schrieffer J.R., Heeger A.J. Solitons in Polyacetylene // *Phys. Rev. Lett.* 1979. № 42. P. 1698–1701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.42.1698.

13. Hofstrand A., Li H., Weinstein M.I. Discrete Breathers of Nonlinear Dimer Lattices: Bridging the Anti-continuous and Continuous Limits // *J. Nonlinear Sci.* 2023. Vol. 33, No. 4. P. 1–44. DOI: 10.1007/s00332-023-09909-x.

14. S. Q. Shen. Topological insulators: Dirac equation in condensed matter. 2nd ed. Springer, 2017. 279 p. ISBN 978-981-10-4605-6. DOI: 10.1007/978-981-10-4606-3

15. Guo T., Cao L., Assouar B. [et al.] Acoustic Su-Schrieffer-Heeger chain with phase nonreciprocal couplings // *J. Appl. Phys.* AIP Publishing LLC, 2025. Vol. 137, no. 15. DOI: 10.1063/5.0254537.

16. He C., Ni X., Ge H. [et al.] Acoustic topological insulator and robust one-way sound transport // Nat. Phys. 2016. Vol. 12, № 12. P. 1124–1129. DOI: 10.1038/nphys3867.
17. Xue H., Yang Y., Gao F. [et al.] Acoustic higher-order topological insulator on a kagome lattice // Nat. Mater. Springer US, 2019. Vol. 18, no 2. P. 108–112. DOI: 10.1038/s41563-018-0251-x.
18. Apigo D.J., Cheng W., Dobiszewski K.F. [et al.] Observation of Topological Edge Modes in a Quasiperiodic Acoustic Waveguide // Phys. Rev. Lett. American Physical Society, 2019. Vol. 122, No 9. P. 95501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.095501.
19. Guo P.-Y., Wang L.-W., Li W. [et al.] Multiband topology in acoustic coupled Su-Schrieffer-Heeger chains // Phys. Rev. Applied. 2024. V. 22. P. 054079. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.22.054079.
20. Bykov N.V. Modeling of Electromagnetic Wave Propagation in a Ring Binary Waveguide Chain. Proceedings of the XXIII International Conference on Computational Mechanics and Modern Applied Software Systems (CMMASS 2023). Moscow, 2023, pp. 30–32. ISBN: 978-5-4316-1054-7.
21. Bykov N.V. Stopbands of sound waves propagation construction in a corrugated duct by determining the stability of a solution // Noise Theory and Practice. 2023. Vol. 9. No. 2 (33). P. 12-18.
22. Kvande C.I., Hill D. B., Blume D. Finite Su-Schrieffer-Heeger chains coupled to a two-level emitter: Hybridization of edge and emitter states // Phys. Rev. A. 2023. Vol. 108, No. 2, P. 023703. DOI: 10.1103/PhysRevA.108.023703.
23. Song W., Sun W., Chen C. [et al.] Robust and Broadband Optical Coupling by Topological Waveguide Arrays // Laser & Photonics Reviews. 2020 14(2):1900193.