

УДК: 534.2  
OECD: 1.03

## Волновые процессы в средах с цилиндрическими поверхностями при условии нежесткого контакта

Вагин А.В.<sup>1\*</sup>, Воротынцева А.С.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ассистент кафедры ЭУТ, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Санкт-Петербург

<sup>2</sup>Магистрант, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Санкт-Петербург

### Аннотация

В работе исследовано распространение волны Лява в слоистой цилиндрической среде параллельно слоям структуры. Представлено описание распространения волн Лява на цилиндрических поверхностях системы «твердый слой-упругое полупространство» при заданных условиях. Найдены и решены относительно волнового числа дисперсионные уравнения, полученные для случаев среды с однородными и неоднородными граничными условиями. По полученным решениям построены графические зависимости скорости волны Лява от частоты ультразвука при анализе волновых процессов в однородной среде и относительной толщины слоя в случае распространения волны в неоднородной среде. Показано влияние радиуса кривизны цилиндрической поверхности на скорость распространения волны. Расчеты проводились для графита с полупространством в виде стали на частоте ультразвука 1 МГц.

**Ключевые слова:** волна Лява, дисперсионное уравнение, слоистая среда, неоднородные граничные условия, волновые процессы.

## *Wave Processes in Media with Cylindrical Surfaces Under Conditions of Non-Rigid Contact*

Vagin A.V.<sup>1\*</sup>, Vorotyntseva A.S.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Assistant of the Department of Electroacoustics and Ultrasonic Engineering, St. Petersburg Electrotechnical University ETU 'LETI', St. Petersburg, Russia

<sup>2</sup>Master's student, St. Petersburg Electrotechnical University ETU 'LETI', St. Petersburg, Russia

### Abstract

*This work investigates the propagation of a Love wave in a layered cylindrical medium parallel to the layers of the structure. The description of the propagation of Love waves on cylindrical surfaces of the "solid layer-elastic half-space" system under specified conditions is presented. The dispersion equations obtained for the cases of a medium with homogeneous and inhomogeneous boundary conditions are found and solved with respect to the wave number. Based on the solutions obtained, graphical dependences of the Love wave speed on the ultrasound frequency were constructed when analyzing wave processes in a homogeneous medium and the relative thickness of the layer in the case of wave propagation in an inhomogeneous medium. The influence of the radius of curvature of a cylindrical surface on the speed of wave propagation is shown. Calculations were carried out for graphite with a half-space of steel at an ultrasound frequency of 1 MHz.*

---

\*E-mail: av.vagin@bk.ru (Вагин А.В.)

**Key words:** Love wave, dispersion equation, layered medium, inhomogeneous boundary conditions, wave processes.

## Введение

Впервые вопрос о распространении поверхностных волн с вертикальной и горизонтальной поляризацией по цилиндрическим поверхностям в направлении, перпендикулярном образующей (ось  $z$ ) и их характерных свойствах был в общем плане рассмотрен в работах [1,2,3]. Такой непреходящий интерес к изучению распространения волн на цилиндрических поверхностях в настоящее время поддерживается развитием и совершенствованием традиционных конструкционных материалов, что в свою очередь диктует необходимость получения полных знаний о волновых процессах распространения волн в таких средах, а также применения новых видов контрольной аппаратуры.

Широкий спектр информативных возможностей при исследовании строения и вещественного состава новых материалов, а также существующая возможность инженерных изысканий по исследованию уже созданных материалов обеспечивает перспективное направление – изучение распространения поверхностных волн в цилиндрических средах.

В большинстве практических случаев криволинейные поверхности, по которым происходит распространение волн можно аппроксимировать на цилиндрическую или сферическую поверхность.

Существенный интерес представляет исследование волновых процессов в таких средах при наличии поверхностной неоднородности, что имеет место в ряде случаев, таких как механическая обработка поверхности методом ионной имплантации, освещении фоточувствительных полупроводниковых пьезоэлектрических кристаллов (сульфида кадмия, селенида кадмия, оксида цинка, сульфида цинка) поглощаемым светом и проч. [4]

Рассматривая исследования цилиндрических сред с позиций волновых процессов в них, актуальным является отдельный случай поверхностных волн – волн Лява, интерес к которым обусловлен широким применением волн этого типа для решения задач неразрушающего контроля различных поверхностных дефектов структур, а также возможностью нахождения физико-механических характеристик отдельных слоев при исследовании слоистых сред [5,6].

Волны Лява, имеют поляризацию, ортогональную сагиттальной плоскости. Для применения в неразрушающей диагностике наибольшее значение имеют волны Лява, а также Лэмба (Рэлея – Лэмба, если слои контактируют с полупространством) и SH-волны как обладающие дисперсионными свойствами (зависимостью частоты колебаний от фазовой скорости) и позволяющие по соответствующим дисперсионным кривым восстанавливать физико-механические свойства отдельных слоев в многослойных системах, что исследуется в работах [7-15].

Теоретические аспекты применения волн Лява в неразрушающей диагностике слоистых сред различной конфигурации рассматриваются в [6,10].

В работах [16,17] распространение волн Лява исследуется с точки зрения сейсмической активности – в [16] отмечена значимость волн Лява при преобразовании сейсмической энергии при землетрясениях, а в [17] проведено исследование структуры

сейсмических волн Лява с построением трехмерной математической модели. Несколько работ [18-20] посвящено анализу волновых процессов при распространении волн Лява в слоистых структурах системы «твердый слой-упругое полупространство» в случае однородных граничных условий, в [21,22] подробно рассмотрен случай распространения волны Лява по цилиндру со слоем при условии жесткого контакта. Таким образом, обширное применение волн Лява для решения различного рода задач является актуальной темой для исследования.

Задачей данной работы является исследование распространения волн Лява в цилиндрических слоистых средах, представляющих собой систему «твердый слой-упругое полупространство» при неоднородных граничных условиях между слоями структуры. Решение поставленной задачи достигается выводом дисперсионного уравнения и его решением относительно волнового числа (параметра скорости распространения волны).

В случае рассмотрения волновых процессов в однородных средах граничные условия описывают полную передачу компонент упругих смещений и механических напряжений – случай так называемого жесткого контакта, при этом твердый слой является изотропным и идеально упругим. В случае неоднородной среды граничные условия описывают неполную передачу компонент упругих смещений, вызванную наличием на поверхности границы слоев структуры выступов или впадин микрорельефа при полной передаче компонент механических напряжений. Количественно описать неоднородность позволяет введение коэффициентов жесткости, содержащих параметр шероховатости. Данный параметр описывается средним расстоянием между ближайшими неровностями на рассматриваемой длине участка контакта. Использование параметра шероховатости при аналитическом рассмотрении распространения волн по различным поверхностям позволяет идентифицировать конфигурацию и размеры неоднородности, что представляет возможным определенно устанавливать функциональную зависимость упругих свойств жесткости от параметров контактирующих поверхностей [23].

## 1. Описание распространения волн Лява на цилиндрических поверхностях

В рамках поставленной задачи рассматривается слоистая цилиндрическая поверхность, представляющая собой систему «твердый слой-упругое полупространство» (рис. 1). Для определенности, требующейся при дальнейших расчетах примем, что материалами сред являются сталь (первый слой – полупространство) и графит (второй слой); радиус кривизны цилиндрической поверхности от центра до верхней границы второго слоя составляет  $R_2 = 110$  мм до границы раздела слоев –  $R_1 = 100$  мм. Известны также данные для этих сред – плотности и параметры Лямэ:  $\rho_1, \lambda_1, \mu_1$  – для слоя стали,  $\rho_2, \lambda_2, \mu_2$  – для слоя графита.

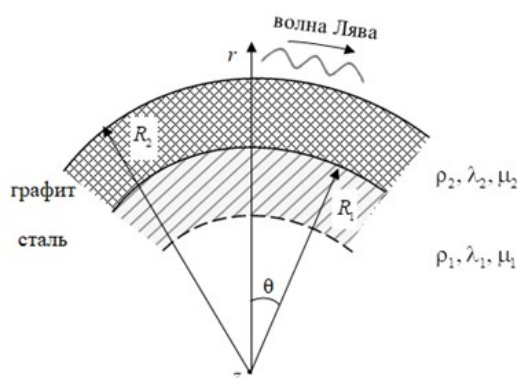


Рис. 1. Геометрические соотношения задачи

Учитывая тот факт, что волна Лява – чисто поперечная волна, имеющая горизонтальную поляризацию, определим уравнение движения для волны такого типа [18]:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_t}{\partial t^2} - \mu \Delta \xi_t = 0,$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $\xi_t$  – вектор поперечного смещения частиц,  $\mu$  – модуль сдвига,  $\Delta \xi_t = grad(div(\xi_t))$ .

Так как задача распространения волн рассматривается на цилиндрической поверхности, удобно представить уравнение движения в соответствующей системе координат  $(r, \theta, z)$  где ось цилиндрической поверхности соответствует оси координат  $z$  при параллельном распространении волны Лява, т.е. по азимутальной координате. При данной постановке задачи имеем:  $\xi_r = \xi_\theta = 0, \xi_z \neq 0$  т.е. у поперечных волн единственной ненулевой компонентой смещения является компонента, параллельная образующей цилиндра. Тогда уравнение движения запишется в виде:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial t^2} = \mu \Delta \xi_z = \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \xi_z,$$

где  $\Delta \xi_z = grad(div(\xi_z))$ ,  $r, \theta$  – параметры системы координат.

Из теории упругости известно, что решение вышеприведенного уравнения движения при рассмотрении задачи распространения волн по цилиндру, должно соответствовать условиям отсутствия напряжений на цилиндрической поверхности, принципу погашаемости, представлять зависимость от азимутальной координаты по экспоненциальному закону  $exp[\pm ip\theta]$ , где  $i$  – мнимая единица,  $p$  – угловое волновое число, а также соответствовать условию перехода в рэлеевскую волну, распространяющуюся вдоль плоской границы упругого полупространства с вакуумом при стремлении радиуса кривизны цилиндра  $R$  к бесконечности и конечном соотношении  $p/R$  [18].

В соответствии с вышесказанным, решение представленного уравнения движения будем искать в форме [18]:

$$\xi_z = \xi_z(r) exp[i(p\theta - \omega t)],$$

где  $\omega$  – частота,  $t$  – время.

Также известно [21], что компоненты смещения в двух средах описываются уравнениями Гельмгольца в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + k_t^2 \psi = 0,$$

где  $\psi$  – векторный потенциал,  $k_t^2$  – квадрат волнового числа.

В соответствии с тем, что одним из фундаментальных решений таких уравнений является семейство бесселевых функций [24], компоненты смещений во втором  $\xi_z^{(2)}$  и первом  $\xi_z^{(1)}$  слое будут определяться следующими выражениями:

$$\xi_z^{(1)} = A J_p \left( k_t^{(1)} r \right) e^{ip\theta} \text{ при } r < R_1, \quad (1)$$

$$\xi_z^{(2)} = \left[ B J_p \left( k_t^{(2)} r \right) + C N_p \left( k_t^{(2)} r \right) \right] e^{ip\theta} \text{ при } R_1 < r < R_2, \quad (2)$$

где  $A, B, C$  – неизвестные константы,  $k_t^{(1,2)} = \sqrt{\frac{\rho_{1,2} \omega^2}{\mu_{1,2}}}$  – волновое число для каждой среды,  $J_p \left( k_t^{(1,2)} r \right)$  – функция Бесселя первого рода порядка  $p$ ,  $N_p \left( k_t^{(2)} r \right)$  функция

Бесселя второго рода (функция Неймана) порядка  $p$ , причем азимутальная координата рассматривается в бесконечном интервале:  $-\infty < \theta < +\infty$ .

Согласно обобщенному закону Гука [25], который выражает линейную зависимость тензора деформаций и тензора напряжений:

$$\sigma_{ik} = C_{iklm} u_{lm},$$

где  $\sigma_{ik}$  - тензор напряжения,  $C_{iklm}$  - тензор модулей упругости,  $u_{lm}$  - тензор деформации, можно получить выражения для компонент механических напряжений:

$$\sigma_z^{(1)} = \mu_1 \frac{\partial \xi_z^{(1)}}{\partial r}, \quad (3)$$

$$\sigma_z^{(2)} = \mu_2 \frac{\partial \xi_z^{(2)}}{\partial r}, \quad (4)$$

где обозначения индексами 1 и 2 аналогичны обозначениям в выражениях для компонент упругих смещений.

Таким образом, получены выражения необходимых компонент – упругих смещений (1), (2) и механических напряжений (3), (4). Подставляя эти выражения в определенные граничные условия для конкретного случая получим дисперсионное уравнение, определяющее скорость распространения волны.

## 2. Распространение волн Лява в однородных средах

Для решения задачи нахождения дисперсионного уравнения необходимо ввести систему граничных условий. Для рассматриваемой структуры «твердый слой - упругое полупространство» при жестком контакте граничные условия определяются тремя уравнениями, первое из которых выражает равенство механических напряжений на границе двух сред (5), второе – равенство нулю составляющих механических напряжений на внешней границе верхнего слоя (6), третье – равенство составляющих упругих смещений на границе сред (7):

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)} \text{ при } r = R_1. \quad (5)$$

$$\sigma_z^{(2)} = 0 \text{ при } r = R_2. \quad (6)$$

$$\xi_z^{(1)} = \xi_z^{(2)} \text{ при } r = R_1. \quad (7)$$

Выполняя подстановку полученных выше выражений (1)-(4) в определенные граничные условия при жестком контакте (5)-(7), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \mu_1 \frac{\partial \xi_z^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = \mu_2 \frac{\partial \xi_z^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \\ \frac{\partial \xi_z^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = 0, \\ \xi_z^{(1)} \Big|_{T=R_1} = \xi_z^{(2)} \Big|_{T=R_1}. \end{cases} \quad (8)$$

В данную систему уравнений подставляются известные компоненты упругих

смещений (1), (2):

$$\begin{cases} \mu_1 A J_p' \left( k_t^{(1)} R_1 \right) - B \mu_2 J_p' \left( k_t^{(2)} R_1 \right) - C \mu_2 N_p' \left( k_t^{(2)} R_1 \right) = 0, \\ B J_p' \left( k_t^{(2)} R_2 \right) + C N_p' \left( k_t^{(2)} R_2 \right) = 0, \\ A J_p \left( k_t^{(1)} R_1 \right) - B J_p \left( k_t^{(2)} R_1 \right) - C N_p \left( k_t^{(2)} R_1 \right) = 0, \end{cases}$$

где  $J_p'(x) = \frac{dJ_p(x)}{dx}$ ,  $N_p'(x) = \frac{dN_p(x)}{dx}$ , при  $x = k_t^{(1,2)} R_{1,2}$ .

Составим детерминант по сформированной системе уравнений и приравняем его к нулю:

$$\begin{vmatrix} \mu_1 J_p' \left( k_t^{(1)} R_1 \right) & -\mu_2 J_p' \left( k_t^{(2)} R_1 \right) & -\mu_2 N_p' \left( k_t^{(2)} R_1 \right) \\ 0 & J_p' \left( k_t^{(2)} R_2 \right) & N_p' \left( k_t^{(2)} R_2 \right) \\ J_p \left( k_t^{(1)} R_1 \right) & -J_p \left( k_t^{(2)} R_1 \right) & -N_p \left( k_t^{(2)} R_1 \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Выполняя несложные математические преобразования, получим решение детерминанта - дисперсионное уравнение для рассматриваемой задачи [26]:

$$\frac{J_p' \left( k_t^{(1)} R_1 \right)}{J_p \left( k_t^{(1)} R_1 \right)} = \frac{\mu_2 k_t^{(2)}}{\mu_1 k_t^{(1)}} \times \frac{J_p' \left( k_t^{(2)} R_1 \right) N_p' \left[ k_t^{(2)} (R_1 + h) \right] - J_p' \left[ k_t^{(2)} (R_1 + h) \right] N_p' \left( k_t^{(2)} R_1 \right)}{J_p \left( k_t^{(2)} R_1 \right) N_p' \left[ k_t^{(2)} (R_1 + h) \right] - J_p' \left[ k_t^{(2)} (R_1 + h) \right] N_p \left( k_t^{(2)} R_1 \right)}, \quad (9)$$

где  $h = R_2 - R_1$  - толщина второго слоя.

Содержащее специальные функции Бесселя и Неймана дисперсионное уравнение (9) является трансцендентным и имеет множество решений. Существующие корни данного уравнения соответствуют волнам Лява разных порядков и определяются параметром  $p$ , связь которого с величиной волновых чисел  $k_t$  при определенном радиусе  $R$  устанавливает уравнение (9). Для дальнейшего аналитического рассмотрения и получения соотношения для основной моды необходимо упростить полученное дисперсионное уравнение - будет принято допущение малости толщины второго слоя среды, т.е.  $h k_t^{(2)} \ll 1$ , а также применены сведения из теории бesselевых функций [27]. Так, при упрощении дисперсионного уравнения (9) применены правила дифференцирования бesselевых функций:

$$\frac{d}{dx} J_p(x) = -J_{p+1}(x) + \frac{p J_p(x)}{x}, \quad (10)$$

$$\frac{d}{dx} J_p(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p J_p(x)}{x}. \quad (11)$$

Аналогичные правила (10), (11) справедливы и для функций Неймана.

Также применено выражение (12), исходящее из соотношения между бesselевыми функциями первого и второго рода (функции Бесселя и функции Неймана):

$$N_p(x) = \frac{J_p(x) \cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)},$$

$$J_p(x) N_p'(x) - J_p'(x) N_p(x) = \frac{2}{\pi x}, \quad (12)$$

и функциональное уравнение типа определителя Вронского (13):

$$J'_p(x)N_{p+1}(x) - J_{p+1}(x)N'_p(x) = -\frac{2p}{\pi x^2}. \quad (13)$$

Таким образом, принимая во внимание условие малости толщины второго слоя и выражения (10) и (11), а также учитывая (12) и (13), дисперсионное уравнение (9) преобразуется к следующему упрощенному виду (14):

$$\frac{J'_p\left(k_t^{(1)}R_1\right)}{J_p\left(k_t^{(1)}R_1\right)} = -\frac{h\mu_2 p^2 - \left(k_t^{(2)}R_1\right)^2}{R_1\mu_1 k_t^{(1)}R_1}, \quad (14)$$

Для построения графических зависимостей заменим функции Бесселя в (14) их асимптотическим представлением. Пользуясь приближением (15), (16) приведенным в [27], предназначенным для бесселевых функций с большим индексом (порядком), получим:

$$J_p(p) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} \cdot \pi p^{\frac{1}{3}}} - \frac{3^{\frac{5}{6}}\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{2^{\frac{1}{3}} \cdot 140\pi p^{\frac{5}{3}}} + o\left(p^{-\frac{5}{3}}\right); \quad (15)$$

$$J'_p(p) = \frac{3^{\frac{1}{6}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2^{\frac{1}{3}} \cdot \pi p^{\frac{2}{3}}} + o\left(p^{-\frac{2}{3}}\right), \quad (16)$$

где  $\Gamma(x)$  - гамма-функция Эйлера, запишем:

$$p = \left[ \frac{\alpha}{\beta} \left(k_t^{(1)}R_1\right)^{\frac{2}{3}} \frac{R_1\mu_1}{-h\mu_2} + \left(k_t^{(2)}R_1\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (17)$$

где  $\alpha = \frac{3^{\frac{1}{6}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2^{\frac{1}{3}}\pi}$ ,  $\beta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}\pi}$ , вторым членом в выражении (15) пренебрегаем

ввиду его малости по сравнению с первым.

В [21] показано, что для рассматриваемого случая распространения волн существуют ограничения по частоте – существует некоторая предельная частота  $\omega_{\text{пр}}$  :  $\omega > \omega_{\text{пр}}$ , что соответствует случаю  $k_t^{(1)}R_1 = p$  :

$$\left. \frac{J'_p\left(k_t^{(1)}R_1\right)}{J_p\left(k_t^{(1)}R_1\right)} \right|_{k_t^{(1)}R_1=p} < \frac{J'_p\left(k_t^{(1)}R_1\right)}{J_p\left(k_t^{(1)}R_1\right)},$$

т.е.  $\left[k_t^{(1)}R_1\right]_{\text{пр}} = \frac{\omega_{\text{пр}}}{c_t^{(1)}}R_1$ ,  $c_t^{(1)}$  - скорость поперечной волны. Используя

асимптотическое представление для бесселевых функций, приведенное в работах [21, 27], и преобразовывая дисперсионное уравнение (14) с учетом допущений (18) [21]:

$$\frac{\mu_1 k_t^{(1)}}{\mu_2 k_t^{(2)}} \times \frac{J'_p\left(k_t^{(1)}R_1\right)}{J_p\left(k_t^{(1)}R_1\right)} \simeq h k_t^{(2)} \times \left( 1 - \frac{p^2}{\left(k_t^{(2)}R_1\right)^2} \right) \text{ при } h k_t^{(2)} \ll 1, \quad (18)$$

$$\frac{J'_p\left(k_t^{(1)}R_1\right)}{J_p\left(k_t^{(1)}R_1\right)} \propto \left( \frac{\omega_{\text{пр}}}{c_t^{(1)}}R_1 \right)^{-2} \text{ при } p > k_t^{(1)}R_1 \gg 1,$$

а также подставляя вышеприведенные предельные значения в данное выражение, получим условие ограничения по частоте (19):

$$\omega_{\text{пр}} \propto \left( \frac{c_t^{(1)}}{R_1} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{\mu_1 c_t^{(2)}}{\mu_2 c_t^{(1)}} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{c_t^{(2)}}{R_2 - R_1} \right)^{\frac{1}{3}} \left( 1 - \frac{(c_t^{(2)})^2}{(c_t^{(1)})^2} \right)^{-\frac{1}{3}}, \quad (19)$$

Подставляя в (19) различные значения радиусов кривизны цилиндра ( $R = 70, 90, 110$  мм), получим значения предельных частот для каждого случая:  $f_{\text{пр}}|_{R=110 \text{ мм}} \approx 0.11$  МГц;  $f_{\text{пр}}|_{R=90 \text{ мм}} \approx 0.13$  МГц;  $f_{\text{пр}}|_{R=70 \text{ мм}} \approx 0.15$  МГц.

Таким образом, из выражения для ограничения частотного диапазона (19) видно, что есть некоторые условия существования волны Лява: если скорость поперечной волны в первой среде стремится к скорости волны во второй среде, т.е.  $c_t^{(1)} \rightarrow c_t^{(2)}$ , а также если толщина второго слоя равна нулю ( $h = 0$ ), то распространения волн Лява на поверхности цилиндра не существует. Ограничения по толщине связаны с тем, что если  $h \rightarrow 0$ , то соответственно возрастает глубина проникновения волны в слой - это имеет следствием возникновение смещения на линии разветвления бесконечного порядка  $r = 0$ , что в свою очередь является помехой установлению волны в среде.

Также стоит отметить, что если устремить радиус цилиндра в бесконечность  $R \rightarrow \infty$ , т.е. «развернуть» цилиндр в плоскую поверхность, то действительных ограничений по частотному диапазону в данном случае не будет [21].

Для дальнейшего аналитического рассмотрения задачи найдем решения дисперсионного уравнения (17) относительно волнового числа (параметра скорости распространения волны). На рис. 2 по найденным решениям представлены графические построения зависимостей скорости распространения волны Лява  $c$  от частоты ультразвука  $f$ .

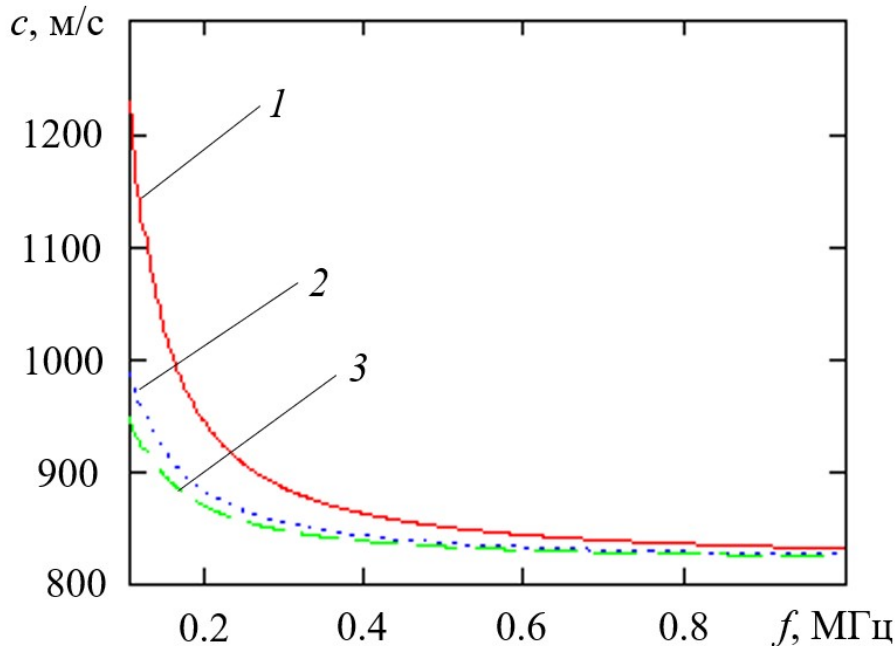


Рис. 2. Зависимость скорости распространения волны Лява от частоты ультразвука

Построения проводились для трех значений радиуса кривизны цилиндрической поверхности:  $R = 110$  мм (кривая 1),  $R = 90$  мм (кривая 2) и  $R = 70$  мм (кривая 3). При анализе полученных зависимостей рис. 2 отмечается убывающий



характер зависимости скорости распространения волны Лява с увеличением частоты, а также видно существенное влияние величины радиуса кривизны цилиндра – по представленным графикам видно, что скорость волны Лява снижается с уменьшением радиуса. Фазовая скорость волны Лява в асимптотике находится между скоростями поперечных волн в слое стали и графита.

### 3. Распространение волн Лява в неоднородных средах

В ряде случаев, например при механической обработке поверхностей, происходит распространение волн в неоднородных структурах, что имеет существенный практический интерес.

В данном случае постановка задачи сводится к рассмотрению цилиндрической структуры изотропного идеально упругого твердого полупространства с тонким и слабонеоднородным слоем. Если такую среду рассматривать как изотропную случайно-неоднородную с распределением микротрещин по глубине по экспоненте, плотность  $\rho$  и модуль сдвига  $\mu$  можно описать следующими законами:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 \left( 1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \exp \left[ -\frac{r}{r_0} \right] \right), \\ \mu &= \mu_0 \left( 1 - \frac{\Delta\mu}{\mu_0} \exp \left[ -\frac{r}{r_0} \right] \right),\end{aligned}\quad (20)$$

где  $r$  – координата, направленная вглубь полупространства,  $r_0$  – характерная глубина неоднородного слоя,  $\rho_0, \mu_0$  – соответствующие значения  $\rho, \mu$  на большой глубине.

Твердая среда с дикронеяднородностью может быть описана с помощью эффективных динамических модулей упругости [23], и тогда динамическое уравнение движения в случае неоднородного полупространства определится как

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (21)$$

где  $\sigma_{ik}$  – тензор механических напряжений, содержащий параметры модулей упругости, причем модули упругости имеют пространственную зависимость от координат  $(r, \theta, z)$ . Руководствуясь тем, что распространение волны Дява учитывается параллельно слоям, т.е.  $\xi_r = \xi_\theta = 0, \xi_z \neq 0$ , а также применяя (20), динамическое уравнение движения (21) запишем следующим образом

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial t^2} - \mu(r) \Delta \xi_z - \frac{d\mu}{dr} \frac{\partial \xi_z}{\partial r} = 0,$$

причем  $\mu(r) \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = 0$  – должно соблюдаться условие отсутствия сдвиговых

напряжений на границе раздела слоев системы  $r = R_1$ .

Руководствуясь описанной выше общей постановкой задачи для случая однородной среды и принимая такими же параметры модели, как и в случае жесткого контакта (т.е. однородных граничных условий), рассмотрим распространение волны Лява при неоднородных граничных условиях. Для решения этой задачи необходимо внести соответствующие изменения в систему уравнений (8). Система содержит граничные условия (5)-(7), при этом выражения (5) и (6) не претерпевают изменений в случае нежесткого контакта. Корректировке подлежит выражение (7), которое описывает неоднородность – условие нежесткого контакта на границе раздела двух сред,

закрывающееся в неполной передаче составляющих упругих смещений при сохранении передачи механических напряжений [28]:

$$\xi_z^{(2)} - \varepsilon_z^{(1)} = \frac{\sigma_z^{(1)}}{KGT}, \quad (22)$$

где  $KGT = \frac{\mu_2 \mu_1 c_t^{(2)} c_t^{(1)}}{\mu_2 c_t^{(2)} + \mu_1 c_t^{(1)}} \frac{2\pi(1-\zeta)}{\omega d^2 \zeta}$  – тангенциальный коэффициент жесткости,

$\zeta$  – коэффициент перфорации,  $d$  – среднее расстояние между контактными участками.

Тогда, применяя ранее описанные граничные условия (5), (6) и учитывая (22), получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 \frac{\partial \xi_z^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = \mu_2 \frac{\partial \xi_z^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \\ \frac{\partial \xi_z^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = 0, \\ \xi_z^{(2)} \Big|_{r=R_1} - \xi_z^{(1)} \Big|_{r=R_1} = \frac{\partial \xi_z^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=R_1} \frac{1}{KGT} \end{array} \right.$$

Подставляя в данную систему известные выражения для компонент упругих смещений (1), (2), получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} A\mu_1 J'_p(k_t^{(1)} R_1) - B\mu_2 J'_p(k_t^{(2)} R_1) - C\mu_2 N'_p(k_t^{(2)} R_1) = 0, \\ B J'_p(k_t^{(2)} R_2) + C N'_p(k_t^{(2)} R_2) = 0, \\ -A \left[ J_p(k_t^{(1)} R_1) + \frac{\mu_1}{KGT} J'_p(k_t^{(1)} R_1) \right] + B J_p(k_t^{(2)} R_1) + C N_p(k_t^{(2)} R_1) = 0. \end{array} \right.$$

Как и в случае задачи нахождения дисперсионного уравнения при однородных граничных условиях, по вышеприведенной системе уравнений необходимо составить детерминант и приравнять его к нулю:

$$\left| \begin{array}{ccc} \mu_1 J'_p(k_t^{(1)} R_1) & -\mu_2 J'_p(k_t^{(2)} R_1) & -\mu_2 N'_p(k_t^{(2)} R_1) \\ 0 & J'_p(k_t^{(2)} R_2) & N'_p(k_t^{(2)} R_2) \\ - \left[ J_p(k_t^{(1)} R_1) + \frac{\mu_1}{KGT} J'_p(k_t^{(1)} R_1) \right] & J_p(k_t^{(2)} R_1) & N_p(k_t^{(2)} R_1) \end{array} \right| = 0.$$

Решением детерминанта является дисперсионное уравнение для волны Лява, распространяющейся в цилиндрической слоистой среде системы «твердый слой-упругое полупространство» при условии нежесткого контакта:

$$\frac{J'_p(k_t^{(1)} R_1)}{J_p(k_t^{(1)} R_1) + \frac{\mu_1}{KGT} J'_p(k_t^{(1)} R_1)} = \frac{\mu_2 k_t^{(2)}}{\mu_1 k_t^{(1)}} \times \frac{J'_p[k_t^{(2)}(R_1+h)] N'_p(k_t^{(2)} R_1) - J'_p(k_t^{(2)} R_1) N'_p[k_t^{(2)}(R_1+h)]}{J'_p[k_t^{(2)}(R_1+h)] N'_p(k_t^{(2)} R_1) - J_p(k_t^{(2)} R_1) N'_p[k_t^{(2)}(R_1+h)]}.$$

Для упрощения анализа полученного дисперсионного уравнения, введем ограничение малой толщины второго слоя. Тогда, применяя правила дифференцирования

функций Бесселя и Неймана (10), (11), соотношение между этими функциями (12), а также уравнение типа определителя Вронского (13), запишем дисперсионное уравнение в следующем виде, удобном для дальнейшего аналитического рассмотрения:

$$\frac{J'_p \left( k_t^{(1)} R_1 \right)}{J_p \left( k_t^{(1)} R_1 \right) + \frac{\mu_1}{KGT} J'_p \left( k_t^{(1)} R_1 \right)} = - \frac{h \mu_2 p^2 - \left( k_t^{(2)} R_1 \right)^2}{R_1 \mu_1 k_t^{(1)} R_1}. \quad (23)$$

Также используя асимптотическое представление для бесселевых функций (15), (16) приведем (23) к виду, пригодному для дальнейшего анализа и построения графических зависимостей:

$$p = \left[ \frac{\alpha \left( k_t^{(1)} R_1 \right)}{\alpha \frac{\mu_1}{KGT} + \beta \left( k_t^{(1)} R_1 \right)^{\frac{1}{3}}} \frac{R_1 \mu_1}{h \mu_2} + \left( k_t^{(2)} R_1 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

Анализ (24) показывает, что при стремлении значения коэффициента перфорации к нулю  $\xi \rightarrow 0$   $KGT \rightarrow \infty$  (что соответствует случаю жесткого контакта), дисперсионное уравнение перейдет в уравнение (17) – рассмотренный случай однородной среды.

Для дальнейшего аналитического рассмотрения дисперсионного уравнения (24) необходимо задать параметры, определяющие неоднородные свойства системы «твердый слой-упругое полупространство». Характеристикой неоднородности является величина шероховатости  $R_z$ , которая в общем случае может быть аппроксимирована участками сферических поверхностей радиусом  $a$ . Тогда, при допущении малости высоты микровыступов сферической формы по сравнению с длиной волны, среднее расстояние между контактными участками может быть определено следующим образом [29, 30]:

$$d = 2\sqrt{2aR_z - R_z^2}.$$

Для определенности установим значения  $R_z = 40$  мкм при коэффициенте перфорации  $\xi = 0.5$ .

По решению дисперсионного уравнения (24) относительно параметра волнового числа, проведем построения графических зависимостей скорости распространения волны от относительной толщины слоя  $n$ . Причем  $n = \frac{h_2}{h_2 + h_1}$ , где  $h_2 = R_2 - R_1$  – толщина второго слоя (графит),  $h_1 = R_1$  – толщина первого слоя (полупространство – сталь).

Построения представлены на рис. 3, где варьируется значение толщины слоя графита: кривая 1 соответствует толщине 10 мм, кривая 2 – 20 мм, кривая 3 – 30 мм.

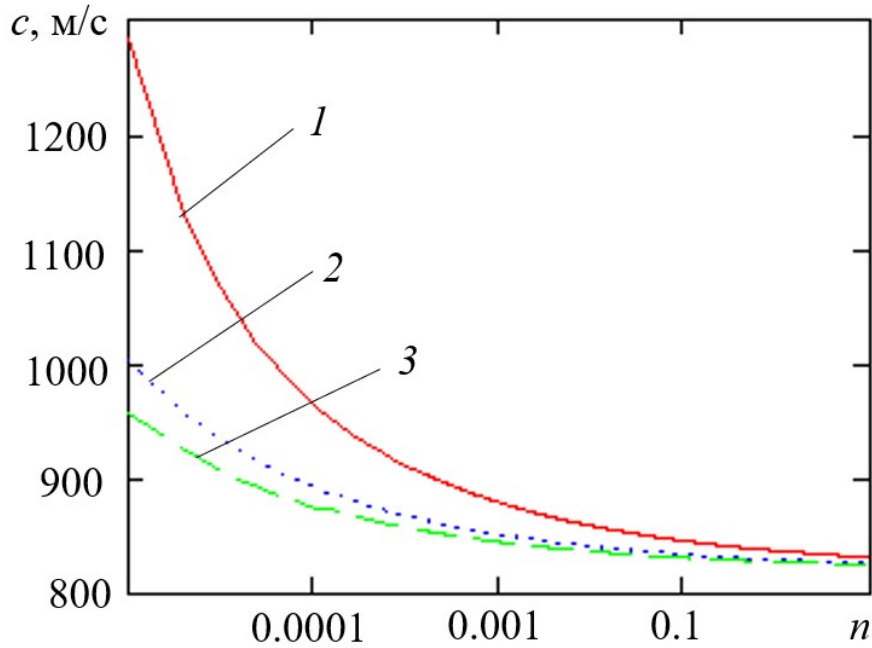


Рис. 3. Зависимость скорости распространения волны Лява от относительной толщины слоя, величина шероховатости

Из рис. 3 видно, что при увеличении относительной толщины второго слоя скорость распространения волны Лява снижается, что соответствует физическим представлениям о распространении волн в слоистых средах. Также из представленных зависимостей видно, что при уменьшении толщины слоя для системы «слой-графит/полупространство-сталь» значительно увеличивается амплитудное значение скорости волны. Полученные зависимости используются в задачах определения основных физико-механических характеристик материала на основе акустических измерений [23], и находятся в согласии с теоретическими результатами, представленными в [29, 30, 31].

### Заключение

1. Установлено, что абсолютное значение скорости распространения волны Лява зависит от следующих параметров: в случае однородной среды – радиус кривизны цилиндра, в случае неоднородной среды – относительная толщина слоя. Влияние этих параметров отражено графическими зависимостями для обоих случаев.

2. По построенным графическим зависимостям в пп. 2 и 3 отмечено снижение скорости распространения при увеличении частоты ультразвука (построения при однородных граничных условиях) и при увеличении параметра относительной толщины слоя (случай неоднородных граничных условий). Отмечено влияние толщины слоя для системы «слой-графит/полупространство-сталь» – при уменьшении данного параметра значительно повышается амплитудное значение скорости волны.

3. Дополнительным влияющим параметром на значение фазовой скорости волны является не только радиус кривизны цилиндрической поверхности, но и наличие дополнительных промежуточных слоев.

4. Представлены отличия цилиндрических слоистых сред в части акустических свойств от простейшего плоскопараллельного случая.

**Список литературы**

1. Chen C.L. On the electroacoustic waves guided by a cylindrical piezoelectric interface // *J. Appl. Phys.* 1973. № 2. pp. 391-394.
2. Викторов И.А. Поверхностные волны на цилиндрических поверхностях кристаллов // *Акустический журн.* 1974. Т. 20. № 2. С. 199-206.
3. Васькова В.И., Викторов И.А., Сильвестрова И.М., Талашев А.А. О волнах рэлеевского типа на цилиндрической поверхности кристалла сульфида кадмия // *Акуст. журн.* 1975. №3, Т. 21. С. 466-468.
4. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1996. 196 с.
5. Кузнецов С.В., Мондрус В.А. Волны Лява в стратифицированной моноклинной среде // *Прикладная математика и механика.* 2021. Т. 85, №3. С. 347-357.
6. Глухов А.А., Сторожев В.И., Шалдырван В.А. Волны Лява в структуре «однородный изотропный слой на трансверсально-изотропном полупространстве с двойной экспоненциальной неоднородностью» // *Журнал теоретической и прикладной механики.* 2023. Т. 82, №1. С. 32-39.
7. Castagnede W. and Sachse W. Optimized determination of elastic constants of anisotropic solids from wavespeed measurements. *Rev. Progress in QNDE*, 1988, p. 1855-1862.
8. Dayal V. and Kinra V.K. Leaky Lamb waves in an anisotropic plate. 2. Nondestructive evaluation of matrix cracks in fiber-reinforced composites. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1991, v. 89, p. 1590-1598.
9. Peplow A., J. Malmberg, P. Persson. An explicit approach for wave propagation analysis within infinite elastic media. Preprint. 2023.
10. Doxbeck M.A., Hussain M. A., Rama J., Abate A. and Frankel J. An algorithm for the determination of coating properties from laser generated and detected Rayleigh waves using wavelet analysis. *Review of Progress in QNDE*, 2002, v. 21, p. 292–299.
11. Dunkin J.W. Computation of modal solutions in layered elastic media at high frequencies. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 1965, v. 55, p. 335-358.
12. Shuncong Zhong, Walter Nsengiyumva. Nondestructive testing and evaluation of fiber-reinforced composite structures, 2022. 420 p.
13. Yu H. Scanning acoustic microscopy for material evaluation // *Appl. Microsc.* 50, 25. 2020. 11 p.
14. Kline R.A., Green R.E. and C.H. Palmer. Acoustic Emission Waveforms from Stress Corrosion Cracking of 4340 Steel. *Journal of Applied Physics*, 1981, v. 52, p. 141-147.
15. Zhang J., Wu Z. et al. Multimode guided waves-based structural defect localization longitudinally and cross-sectionally in T-bars // *Journal of Aerospace Engineering*, 2020. Vol. 33, N 4. 12 p.
16. Т.Р. Рашидов, С.В. Кузнецов, Б.М. Мардонов, И. Мирзаев. Прикладные задачи сейсродинамики сооружений. Книга 1. Действие сейсмических волн на подземный трубопровод и фундаменты сооружений, взаимодействующих с грунтовой средой. Ташкент.: «Navro'z». 2019. 268 с.
17. Петров И.Б., Голубев В.И., Петрухин В.Ю., Никитин И.С. Моделирование сейсмических волн в анизотропных средах // *Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления.* 2021. Т. 498. С. 59-64.
18. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
19. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 340 с.
20. Рытов С.М. Акустические свойства мелкослоистой среды // *Акустический*

журн. 1956. Т. 2. № 1. С. 71-83.

21. Шевяхов Н.С. О волнах Лява на поверхности цилиндра, покрытого слоем // Акустический журн. 1977. Т. 23. № 1. С. 155-157.

22. Вагин А.В., Воротынцева А.С. Волновые процессы в средах с цилиндрическими поверхностями при условии жесткого контакта // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, №2. С. 186-194.

23. Аббакумов К.Е., Вагин А.В. Дисперсионное уравнение для продольной волны в слоистой среде с неоднородными граничными условиями при различных направлениях распространения // Дефектоскопия. 2020. №1. С. 22-30.

24. Лесин В.В. Уравнения математической физики. Изд-во ИНФРА-М, 2019. 240 с.

25. Стружанов В.В., Бурмашева Н.В. Теория упругости: Основные положения: учеб. пособие. М-во науки и высш. образования Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2019. 204 с.

26. Гуляев Ю.В., Ползикова Н.И. Сдвиговые поверхностные акустические волны на цилиндрической поверхности твердого тела, покрытой слоем инородного материала // Акустический журн. 1978. Т. 24. № 4. С. 504-507.

27. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций, ч.1. М., Изд-во иностр. лит., 1949.

28. Вагин А.В. Распространение поперечных волн с вертикальной и горизонтальной поляризацией в слоистой среде с неоднородными граничными условиями // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2023. Т. 16, № 3. С. 5-14.

29. Аббакумов К.Е. Рассеяние плоских упругих волн на микрошероховатой границе раздела твердых сред // Дефектоскопия, 2017. №7. с. 3-13.

30. Аббакумов К.Е., Вагин А.В., Сидоренко И.Г. Акустические характеристики твердых упругих сред с ориентированной микротрещиноватостью // Дефектоскопия, 2023. № 4. с. 3-13.

31. Аббакумов К.Е., И Б.Ч., Сидоренко И.Г. Характеристики волновых процессов в консолидированных средах с учетом контактных явлений между частицами вещества // Noise Theory and Practice. - 2022. - N 7(2). - С. 188-198.

## References

1. Chen C.L. On the electroacoustic waves guided by a cylindrical piezoelectric interface // J. Appl. Phys. 1973. № 2. pp. 391-394.

2. Viktorov I.A. Poverhnostnye volny na cilindricheskikh poverhnostyakh kristallov // Akusticheskij zhurn. 1974. v. 20. № 2. pp. 199-206. (in Russ.)

3. Vas'kova V.I., Viktorov I.A., Sil'vestrova I.M., Talashev A.A. O volnah releevskogo tipa na cilindricheskoy poverhnosti kristalla sul'fida kadmiya // Akust. zhurn. 1975. №3, v. 21. pp. 466-468. (in Russ.)

4. Viktorov I.A. Fizicheskie osnovy primeneniya ul'trazvukovykh voln Releya i Lemba v tekhnike. M.: Nauka, 1996. 196 p. (in Russ.)

5. Kuznecov S.V., Mondrus V.A. Volny Lyava v stratificirovannoj monoklinnoj srede // Prikladnaya matematika i mekhanika. 2021. v. 85,no.3. pp. 347-357.

6. Gluhov A.A., Storozhev V.I., SHaldyrvan V.A. Volny Lyava v strukture «odnorodnyj izotropnyj sloj na transversal'no-izotropnom poluprostranstve s dvojnoj eksponencial'noj neodnorodnost'yu» // ZHurnal teoreticheskoy i prikladnoj mekhaniki. 2023. v. 82,no.1. pp. 32-39.

7. Castagnede W. and Sachse W. Optimized determination of elastic constants of

anisotropic solids from wavespeed measurements. *Rev. Progress in QNDE*, 1988, p. 1855-1862.

8. Dayal V. and Kinra V.K. Leaky Lamb waves in an anisotropic plate. 2. Nondestructive evaluation of matrix cracks in fiber-reinforced composites. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1991, v. 89, p. 1590-1598.

9. Peplow A., J. Malmberg, P. Persson. An explicit approach for wave propagation analysis within infinite elastic media. Preprint. 2023.

10. Doxbeck M.A., Hussain M. A., Rama J., Abate A. and Frankel J. An algorithm for the determination of coating properties from laser generated and detected Rayleigh waves using wavelet analysis. *Review of Progress in QNDE*, 2002, v. 21, p. 292–299.

11. Dunkin J.W. Computation of modal solutions in layered elastic media at high frequencies. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 1965, v. 55, p. 335-358.

12. Shuncong Zhong, Walter Nsengiyumva. Nondestructive testing and evaluation of fiber-reinforced composite structures, 2022. 420 p.

13. Yu H. Scanning acoustic microscopy for material evaluation // *Appl. Microsc.* 50, 25. 2020. 11 p.

14. Kline R.A., Green R.E. and C.H. Palmer. Acoustic Emission Waveforms from Stress Corrosion Cracking of 4340 Steel. *Journal of Applied Physics*, 1981, v. 52, p. 141-147.

15. Zhang J., Wu Z. et al. Multimode guided waves-based structural defect localization longitudinally and cross-sectionally in T-bars // *Journal of Aerospace Engineering*, 2020. Vol. 33, N 4. 12 p.

16. T.R. Rashidov, S.V. Kuznecov, B.M. Mardonov, I. Mirzaev. *Prikladnye zadachi sejsmodinamiki sooruzhenij. Kniga 1. Dejstvie sejsmicheskikh voln na podzemnyj truboprovod i fundamenty sooruzhenij, vzaimodejstvuyushchih s gruntovoj sredoj.* Tashkent.: «Navro'z». 2019. 268 p. (in Russ.)

17. Petrov I.B., Golubev V.I., Petruhin V.YU., Nikitin I.S. Modelirovanie sejsmicheskikh voln v anizotropnyh sredah // *Doklady RAN. Matematika, informatika, processy upravleniya.* 2021. v. 498. p. 59-64. (in Russ.)

18. Viktorov I.A. *Zvukovyye poverkhnostnyye volny v tverdykh telakh (Sound Surface Waves in Solids)*, Moscow, 1981, 287 p. (in Russ.)

19. Brekhovskih L.M. *Volny v sloistyh sredah.* M.: Nauka, 1973. 340 p. (in Russ.)

20. Rytov S.M. Akusticheskie svojstva melkosloistoj sredy // *Akusticheskij zhurn.* 1956. v. 2.no.1. pp. 71-83. (in Russ.)

21. Shevyahov N.S. O volnah Lyava na poverhnosti cilindra, pokrytogo sloem // *Akusticheskij zhurn.* 1977. v. 23.no.1. pp. 155-157. (in Russ.)

22. Vagin A.V., Vorotyntseva A.S. Wave processes in media with cylindrical surfaces under rigid contact. *Journal of Instrument Engineering.* 2024. Vol. 67, N 2. P. 186–194 (in Russ.)

23. Abbakumov K.E., Vagin A.V. Dispersionnoe uravnenie dlya prodol'noj volny v sloistoj srede s neodnorodnymi granichnymi usloviyami pri razlichnyh napravleniyah rasprostraneniya // *Defektoskopiya.* 2020.no.1. pp. 22-30. (in Russ.)

24. Lesin V.V. *Uravneniya matematicheskoy fiziki.* Izd-vo INFRA-M, 2019. 240 p. (in Russ.)

25. Struzhanov V.V., Burmasheva N.V. *Teoriya uprugosti: Osnovnye polozheniya: ucheb. posobie. M-vo nauki i vyssh. obrazovaniya Ros. Federacii, Ural. feder. un-t. – Ekaterinburg: Izd-vo Ural. un-ta,* 2019. 204 p. (in Russ.)

26. Gulyaev YU.V., Polzikova N.I. Sdvigovyye poverkhnostnyye akusticheskie volny na cilindricheskoy poverhnosti tverdogo tela, pokrytoj sloem inorodnogo materiala // *Akusticheskij zhurn.* 1978. v. 24.no.4. pp. 504-507. (in Russ.)

27. Watson G.N. Teoriya besselevykh funkcij, Part 1. M., Izd-vo inostr. lit., 1949. (in Russ.)
28. Vagin A. V. Propagation of Transverse Waves with Vertical and Horizontal Polarization in a Layered Medium with Inhomogeneous Boundary Conditions // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2023 Vol. 16, no. 3 P. 5–14. (in Russ.)
29. Abbakumov K.E. Rasseyanie ploskih uprugih voln na mikrosherohovatoj granice razdela tverdyh sred // Defektoskopiya, 2017.no.7. pp. 3-13. (in Russ.)
30. Abbakumov K.E., Vagin A.V., Sidorenko I.G. Akusticheskie harakteristiki tverdyh uprugih sred s orientirovannoj mikrotreshchinovatost'yu // Defektoskopiya, 2023.no.4. pp. 3-13. (in Russ.)
31. Abbakumov K.E., I B.Ch., Sidorenko I.G. Characteristics of wave processes in consolidated media taking into account contact phenomena between particles of matter // Noise Theory and Practice. - 2022. - N 7(2). - pp. 188-198.