

УДК: 614.872.5

OECD: 1.03

DOI: 10.56408/2412-8627.2026.1.12.002

Математическая модель описания вибраций, возникающих при работе сельскохозяйственной техники

Воронов А.С.^{1*}, Крутова В.А.²

¹Ассистент кафедры «Механика деформируемого твердого тела»,

²Д.т.н., доцент, и.о. зав. кафедрой «Механика деформируемого твердого тела»,

^{1,2}Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ»

им. Д.Ф. Устинова, г. Санкт-Петербург, РФ

Аннотация

Неверная отстройка инерционно-жесткостных параметров механических систем в сочетании с низким уровнем демпфирования приводит к возникновению значительных вибраций в процессе эксплуатации сельскохозяйственной техники. Это явление не только вызывает повышенные динамические нагрузки на узлы техники, сокращая ресурс работы, но и напрямую воздействует на оператора. В частности, регистрируемые уровни локальной вибрации на рулевом колесе часто превышают допустимые нормы, установленные СанПиН и ГОСТ, что создает риск развития профессиональных заболеваний. В данной работе предлагается уточненная математическая модель описания вибраций, возникающих при работе сельскохозяйственной техники. Это может повысить точность аналитических расчетов и послужить для последующего этапа обоснования эффективности методов виброзащиты и оптимизации динамических характеристик техники, направленных на обеспечение надежности и соблюдение требований охраны труда.

Ключевые слова: вибрация, демпфирование, уравнение Лагранжа, гармоническая вибрация, собственные частоты колебаний, виброускорение

A Mathematical Model for Describing Vibrations Occurring During the Operation of Agricultural Machinery

Voronov A.S.^{1*}, Krutova V.A.²

¹Assistant of the department of Mechanical of Deformable Solids

²D.Sc., Assistant Professor, Acting Head of the department
of Mechanical of Deformable Solids

^{1,2}Baltic State Technical University 'VOENMEH', St. Petersburg, Russia

Abstract

Incorrect tuning of the inertia-stiffness parameters of mechanical systems combined with a low level of damping leads to significant vibrations during the operation of agricultural machinery. This phenomenon not only causes increased dynamic loads on machine components, reducing their service life, but also directly affects the operator. In particular, recorded levels of local vibration on the steering wheel often exceed permissible limits established by SanPiN and GOST standards, which creates a risk of developing occupational diseases. This work proposes a refined mathematical model for describing vibrations arising during the operation of

*E-mail: voronov_as@voenmeh.ru (Воронов А.С.)

agricultural machinery. This can improve the accuracy of analytical calculations and serve as a basis for the subsequent stage of justifying the effectiveness of vibration protection methods and optimizing the dynamic characteristics of the equipment, aimed at ensuring reliability and compliance with occupational health and safety requirements.

Keywords: vibration, damping, Lagrange's equation, harmonic vibration, natural frequencies, vibration acceleration

Введение

Во многих работах, посвященных исследованиям вибраций, возникающих при эксплуатации сельскохозяйственной техники, реальный объект с распределенными инерционно-жесткостными свойствами заменяется дискретным, с несколькими массами [1]-[3]. Такой подход оправдан для конструкций, у которых имеются объекты, масса которых много больше остальных масс. К примеру, в работе [4] исследуется трактор как система с двумя степенями свободы одного объекта – поступательной и вращательной. В работе [5] также рассматривается сельскохозяйственная техника как двумассовая система, однако в ней другие две степени свободы – два поступательных движения разных объектов.

В данной работе трактор рассматривается как трехмассовая система – с тремя поступательными степенями свободы. Такой подход позволяет уточнить аналитические зависимости и уменьшить погрешности в сравнении с экспериментальными данными.

1 Постановка задачи исследования

Рассмотрим трактор как трехмассовую систему. Введем следующие основные геометрические объекты и их обозначения:

1) Рама трактора, к которой посредством упругих соединений осуществляется крепление других конструктивных элементов. Масса рамы – m_1 , коэффициент жесткости соединения с условно неподвижной опорой – k_1^* , коэффициент демпфирования соединения – c_1^* ;

2) Двигатель трактора. Масса двигателя – m_3 , коэффициент жесткости соединения с рамой – k_3^* , коэффициент демпфирования – c_3^* ;

3) Рулевое колесо. Масса рулевого колеса – m_2 , коэффициент жесткости соединения – k_2 , коэффициент демпфирования – c_2 ;

В ходе работы двигателя ввиду несбалансированности вращающихся элементов возникает гармонически изменяющаяся нагрузка $P(t)$.

С учетом введенных обозначений расчетная схема исследуемого объекта представлена на рисунке 1.

На данном этапе исследований не будем учитывать вращение двигателя и рамы относительно оси, направленной перпендикулярно плоскости рисунка 1.

Для дальнейшего удобства заменим жесткости k_1^* и k_3^* , а также коэффициенты демпфирования c_1^* и c_3^* на эквивалентные по соотношению для параллельно соединенных упругих элементов:

$$k_1 = 2k_1^*, \quad k_3 = 2k_3^*, \quad c_1 = 2c_1^*, \quad c_3 = 2c_3^*, \quad (1)$$

где k_1 – коэффициент эквивалентной жесткости опор рамы, k_3 – коэффициент эквивалентной жесткости опор двигателя.

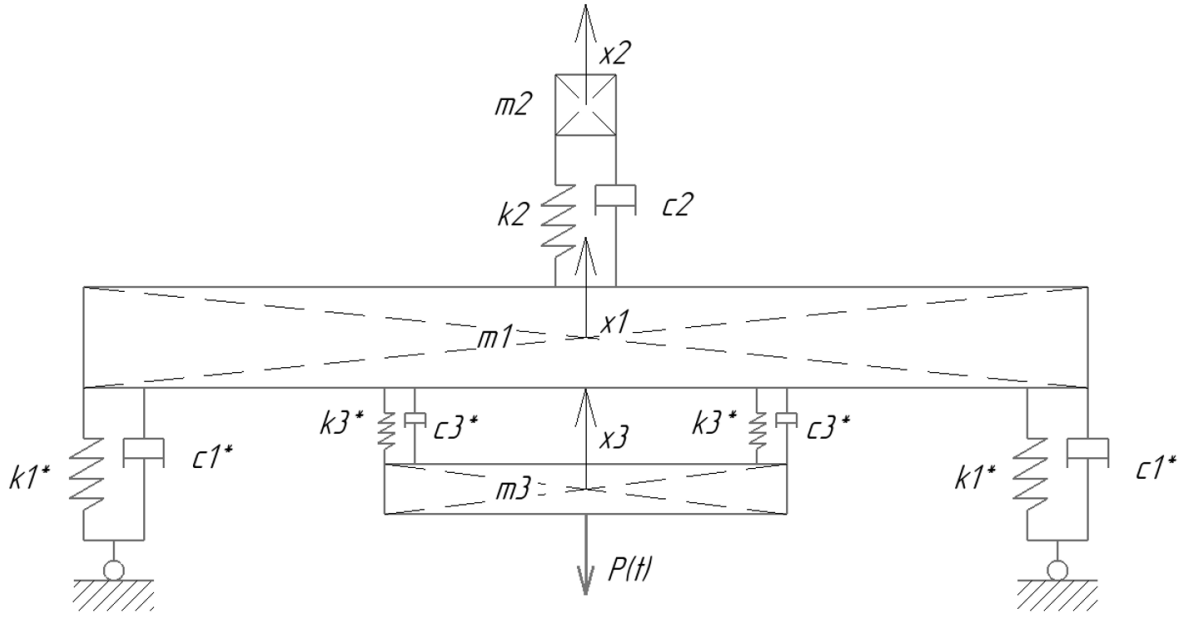


Рисунок 1 – Дискретная трехмассовая модель трактора

2 Уравнение колебаний трехмассовой системы

Для системы, изображенной на рисунке 1, запишем уравнение Лагранжа II рода [6]:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = P_i, \quad (2)$$

где T – кинетическая энергия системы, Π – потенциальная энергия системы, R – функция Рэля (отвечающая за диссипацию энергии), P – обобщенная неконсервативная и недиссипативная сила, q_i – обобщенная координата, \dot{q}_i – обобщенная скорость.

Рассмотрим свободные незатухающие колебания. Тогда каждое из слагаемых правой части уравнения равно нулю, то есть:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0. \quad (3)$$

Для трехмассовой системы, изображенной на рисунке 3, потенциальная и кинетическая энергии определяются уравнениями:

$$T = \frac{m_1(\dot{x}_1)^2}{2} + \frac{m_2(\dot{x}_2)^2}{2} + \frac{m_3(\dot{x}_3)^2}{2}, \quad (4)$$

$$\Pi = \frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{k_2(x_2 - x_1)^2}{2} + \frac{k_3(x_3 + x_1)^2}{2}. \quad (5)$$

Подставляя выражения для кинетической и потенциальной энергий в уравнение Лагранжа, получаем:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2 + k_3)x_1 - k_2 x_2 + k_3 x_3 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 + k_3 x_1 + k_3 x_3 = 0 \end{cases}. \quad (6)$$

В матричном виде:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 & k_3 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ k_3 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (7)$$

Будем искать решение в виде:

$$x_i(t) = A_i \sin(2\pi f_i t), \quad (8)$$

где A_i – амплитуды колебаний, f_i – собственные частоты колебаний.

Подставив (8) в (7), получаем:

$$\left(-4\pi^2 f_i^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 & k_3 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ k_3 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

Собственные частоты колебаний f_i определяются исходя из равенства нулю определителя этой системы:

$$\det \left(-4\pi^2 f_i^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 & k_3 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ k_3 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (10)$$

Аналитическое решение сводится к уравнению 6-й степени (бикубическому, поэтому можно говорить об уравнении 3-й степени). В инженерной практике задачи с системами, представляемыми более чем 3 массами, аналитически не решаются; для определения собственных частот колебаний используют численные методы. Так, в программном комплексе MathCAD собственные частоты колебаний могут быть определены с помощью следующей функции:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\text{genvals}(K, M)}, \quad (11)$$

где K – матрица жесткости системы, M – матрица масс системы.

Недостатком является требования конкретных численных параметров масс и жесткостей элементов системы [7].

Рассмотрим некоторые усредненные инерционно-жесткостные параметры системы, представленные в таблице 1.

Таблица 1 – Усредненные инерционно-жесткостные параметры системы

Наименование элементы	Масса элемента m , кг	Жесткость соединения элементов k^* , Н/м	Коэффициент демпфирования c^* , Н/мс
Рама	500	10^6	1256
Двигатель	800	10^7	49
Рулевое колесо	15	10^5	5060

Подставляя эти значения в уравнение (10) и с помощью функции (11), получим:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\text{genvals}(K, M)} = \left\{ \begin{array}{l} 6,084 \\ 13,07 \\ 41,399 \end{array} \right\} \text{Гц.}$$

3 Анализ вынужденных колебаний с демпфированием

Для трехмассовой системы с демпфированием уравнения Лагранжа дополняются слагаемыми с функцией Рэля и вынуждающей не диссипативной неконсервативной силой (уравнение (2)). Функция Рэля для рассматриваемой системы имеет вид:

$$R = \frac{c_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2}{2} + \frac{c_3 (\dot{x}_3 + \dot{x}_1)^2}{2}. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (2), получаем:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2 + c_3) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + c_3 \dot{x}_3 + (k_1 + k_2 + k_3) x_1 - k_2 x_2 + k_3 x_3 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 + c_3 \dot{x}_1 + c_3 \dot{x}_3 + k_3 x_1 + k_3 x_3 = P(t) \end{cases}. \quad (13)$$

Для примера рассмотрим вынуждающую силу как гармоническую с амплитудой 100 Н. Частота работы двигателя на холостом ходу варьируется в пределах от 600 до 1200 об/мин. Примем частоту равно 1000 об/мин или 16,67 Гц. Тогда:

$$P(t) = P_0 \sin(\omega t) = 100 \sin(2\pi \cdot 16,67t).$$

Решая уравнение (13), получаем графические зависимости виброперемещений и виброскоростей от времени. На рисунках 2-4 представлены максимальные амплитуды виброперемещений, виброскоростей и виброускорений.

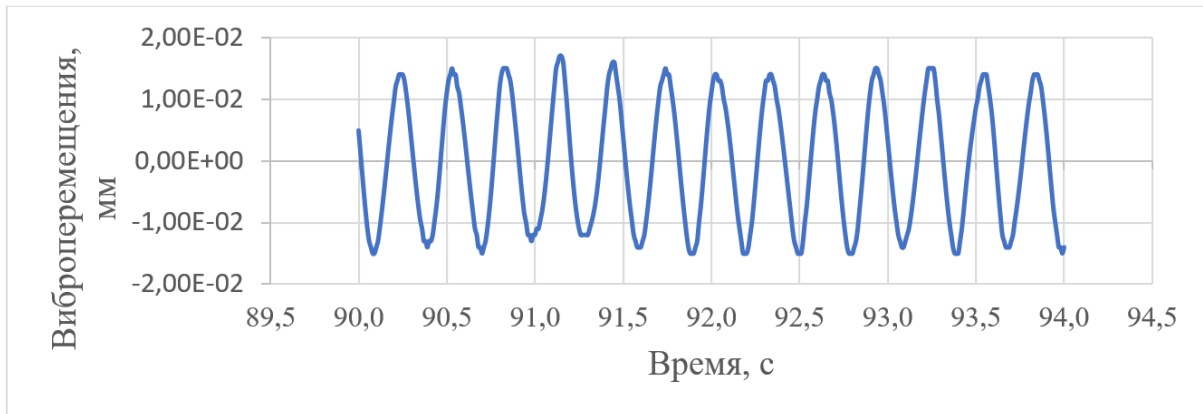


Рисунок 2 – Виброперемещения рулевого колеса, мм

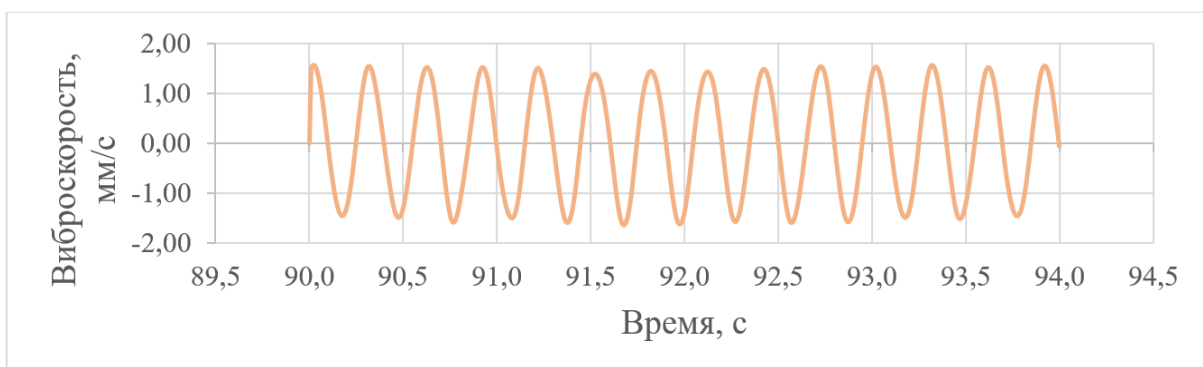
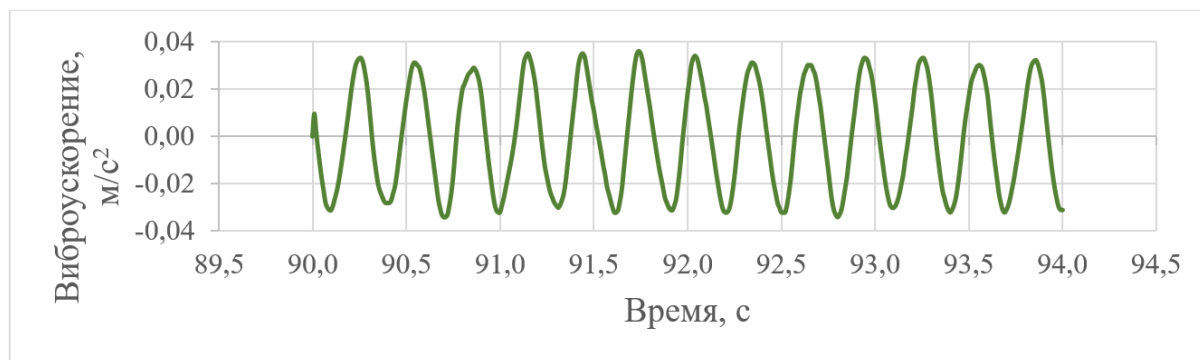


Рисунок 3 – Виброскорости рулевого колеса, мм/с

Рисунок 4 – Виброускорения рамы, м/с²

Из рисунков зависимостей виброперемещений и виброскоростей от времени видно, что в первые секунды действия вынуждающей силы на систему имеет место переходной процесс – гармонические колебания сочетаются с собственными. Собственные колебания по природе затухающие, поэтому с течением времени движение описывается только гармонической частью – амплитуда не зависит от времени.

Сводные результаты по виброперемещениям, виброскоростям и виброускорениям представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Сводные результаты

Элемент, на котором измеряется вибрация	Максимальное виброперемещение, мм	Максимальная виброскорость, мм/с	Максимальное виброускорение, м/с ²
Рама трактора	0,01	1,184	0,023
Двигатель	0,00891	0,929	0,02
Рулевое колесо	0,017	1,679	0,037

Заключение

В статье рассмотрен математический подход к описанию вибраций, возникающих при эксплуатации сельскохозяйственной техники. Трактор рассматривается как трехмассовая система. Составлена система уравнений Лагранжа II рода, которая позволила получить собственные частоты колебаний и проанализировать поведение трактора под действием гармонической силы. Исследование вибраций с использованием многомассовых систем может повысить точность аналитических расчетов и уменьшить погрешность с экспериментальными данными.

Список использованных источников

1. Иванов, Н. И. Основы виброакустики : учебное пособие / Н. И. Иванов. – Санкт Петербург: БГТУ «Военмех» им. Д. Ф. Устинова, 2021. – 132 с. – ISBN 978 5 907324 27 5.
2. Буторина, М. В. Основы виброакустики. Теория и практика борьбы с шумом и вибрацией: учебник. Т. 1 / М. В. Буторина, Н. И. Иванов, А. Е. Шашурин. – Санкт Петербург: Изд во БГТУ «Военмех» им. Д. Ф. Устинова, 2024. – 387 с.: ил. – ISBN 978 5 00221 070 1.

3. Вибрация энергетических машин: справочное пособие / Н. В. Григорьев, Н. Г. Беляковский, В. К. Дондошанский и др.; под ред. д-ра техн. наук, проф. Н. В. Григорьева. – Ленинград: Машиностроение, Ленинградское отделение, 1974. – 463 с.
4. Юань, Цзя-ци; Чжан, Лян. Natural frequency and modal analysis of tractor vibration system // Scientific Reports. – 2025. – Т. 15. – Ст. 33259. – DOI: 10.1038/s41598-025-18736-x.
5. Яицков, И. А. Методология обеспечения виброакустической безопасности локомотивных бригад при проектировании и эксплуатации тепловозов и моторовозов : дис. ... д-ра техн. наук : 05.26.01 / Яицков Иван Анатольевич ; науч. консультант А. Н. Чукарин ; Ростовский государственный университет путей сообщения. – Ростов-на-Дону, 2019. – 279 с.
6. Вильке, В.Г. Теоретическая механика: учебник и практикум для вузов/ В.Г. Вильке. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2025. – 311 с. – (Высшее образование). – Текст : непосредственный.
7. Моисеев, Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем / Н. Н. Моисеев. – Москва: Наука, 1971. – 424 с.

References

1. Ivanov, N. I. (2021). *Osnovy vibroakustiki [Fundamentals of Vibroacoustics]*. Saint Petersburg: BSTU “Voenmekh” named after D. F. Ustinov. 132 p. ISBN 978-5-907324-27-5.
2. Butorina, M. V., Ivanov, N. I., & Shashurin, A. E. (2024). *Osnovy vibroakustiki. Teoriya i praktika bor'by s shumom i vibratsiyey: uchebnik. T. 1 [Fundamentals of Vibroacoustics. Theory and Practice of Noise and Vibration Control: Textbook. Vol. 1]*. Saint Petersburg: BSTU “Voenmekh” named after D. F. Ustinov. 387 p., ill. ISBN 978-5-00221-070-1.
3. Grigor'ev, N. V., Belyakovskiy, N. G., Dondoshanskiy, V. K., et al. (1974). *Vibratsiya energeticheskikh mashin: spravochnoe posobie [Vibration of Power Machines: Reference Manual]*. N. V. Grigor'ev (Ed.). Leningrad: Mashinostroenie, Leningrad Branch. 463 p.
4. Yuan, J., & Zhang, L. (2025). Natural frequency and modal analysis of tractor vibration system. *Scientific Reports*, 15, 33259. <https://doi.org/10.1038/s41598-025-18736-x>
5. Yaitskov, I. A. (2019). *Metodologiya obespecheniya vibroakusticheskoy bezopasnosti lokomotivnykh brigad pri proektirovani i ekspluatatsii teplovozov i motovozov: dis. dokt. tekhn. nauk, 05.26.01 [Methodology for Ensuring Vibroacoustic Safety of Locomotive Crews in the Design and Operation of Diesel Locomotives and Motor Locomotives: Doctoral Dissertation, 05.26.01]*. Rostov State Transport University. 279 p.
6. Vilke, V. G. (2025). *Teoreticheskaya mekhanika: uchebnik i praktikum dlya vuzov [Theoretical Mechanics: Textbook and Workshop for Universities]* (4th ed., rev. and enl.). Moscow: Yurayt Publishing. 311 p. (Higher Education Series).
7. Moiseev, N. N. (1971). *Chislennyye metody v teorii optimal'nykh sistem [Numerical Methods in the Theory of Optimal Systems]*. Moscow: Nauka. 424 p.