

УДК: 534.7

OECD: 01.03.AA

DOI: 10.56408/2412-8627.2026.12.2.009

## Применение нелинейных акустических эффектов для визуализации внутренних структур биологических тканей

Вареникова А.Ю.<sup>1\*</sup>, Чернов Н.Н.<sup>2</sup>, Кравчук Д.А.<sup>3</sup><sup>1</sup>Ассистент, <sup>2,3</sup>Д.т.н., профессор<sup>1,2,3</sup>Кафедра Электрогидроакустической и медицинской техники Институт нанотехнологий, электроники и приборостроения Южный федеральный университет, г. Таганрог, РФ

### Аннотация

Упругие и нелинейные свойства различных сред, в том числе биологических, оказывают существенное влияние на процессы прохождения акустических волн, что дает возможность проводить более точные исследования структур различных объектов. Нелинейные акустические эффекты позволяют более точно разграничивать структурные характеристики биологических объектов за счёт использования в качестве структурной характеристики акустического нелинейного параметра. При исследованиях нелинейных эффектов необходимо не только рассматривать процессы их возникновения и оценивать влияние на получаемую измерительную информацию, но и разграничивать типы акустической нелинейности. Такие нелинейные эффекты как параметрическое взаимодействие и генерация гармонических составляющих определяют дальнейшую техническую реализацию систем акустической визуализации. В работе рассмотрены особенности каждого типа акустической нелинейности, используемой при анализе нелинейных эффектов взаимодействия акустических волн. Рассмотрены особенности систем акустической визуализации, в основе которых лежит параметрическое взаимодействие акустических волн, выражающееся в возникновении комбинационных суммарной и разностной частот. Исследованы особенности генерации тканевых гармоник и их влияние на регистрируемое излучение, в зависимости от типа и толщины среды.

**Ключевые слова:** акустический нелинейный параметр, акустическая визуализация, вторая гармоника, уравнение Бюргерса, нелинейные эффекты, параметрическое взаимодействие, генерация высших гармоник

## *Application of nonlinear acoustic effects for visualization of internal structures of biological tissues*

Varenikova A. Yu.<sup>1\*</sup>, Chernov N. N.<sup>2</sup>, Kravchuk D. A.<sup>3</sup><sup>1</sup> Assistant, <sup>2,3</sup> D.Sc., Professor<sup>1,2,3</sup> Department of Electrohydroacoustic and Medical Technology Institute of Nanotechnology, Electronics and Instrumentation Southern Federal University, Taganrog, Russia

### Abstract

The elastic and nonlinear properties of various media, including biological media, have a significant impact on the transmission of acoustic waves, which makes it possible to conduct more accurate studies

of the structures of various objects. Nonlinear acoustic effects make it possible to more accurately distinguish the structural characteristics of biological objects by using an acoustic nonlinear parameter as a structural characteristic. When studying nonlinear effects, it is necessary not only to consider the processes of their occurrence and assess the impact on the measurement information obtained, but also to distinguish between the types of acoustic nonlinearity. Nonlinear effects such as parametric interaction and generation of harmonic components determine the further technical implementation of acoustic visualization systems. The paper considers the features of each type of acoustic nonlinearity used in the analysis of nonlinear effects of acoustic wave interaction. The features of acoustic visualization systems based on the parametric interaction of acoustic waves, expressed in the occurrence of combined total and difference frequencies, are considered. The features of the generation of tissue harmonics and their effect on the detected radiation, depending on the type and thickness of the medium, are investigated.

**Keywords:** acoustic nonlinear parameter, acoustic visualization, second harmonic, Burgers equation, nonlinear effects, parametric interaction, generation of higher harmonics

## Введение

Использование нелинейных акустических эффектов в визуализации биологических объектов дает возможность повысить качество получаемой диагностической информации. Теоретические и экспериментальные исследования нелинейного взаимодействия [1] акустических волн с биологическими тканями требуют рассмотрения различных методов оценки нелинейности среды, чтобы определить тот тип нелинейного параметра, который будет выступать в качестве измеряемой структурной характеристики среды.

Задача классификации видов акустической нелинейности, характерных для различных сред, требует теоретических и экспериментальных исследований нелинейного взаимодействия акустических волн как между собой, так и с неоднородностями исследуемой среды.

Исследования упругих свойств различных сред привели не только к развитию теоретического описания нелинейных процессов взаимодействия акустических волн, но и к необходимости классификации видов акустической нелинейности, в том числе и в биологических тканях.

Известны два основных типа нелинейности – физическая, которая возникает вследствие разложения в степенной ряд внутренней энергии деформаций среды по линейным и нелинейным модулям упругости и зависит от величины сил межмолекулярного взаимодействия; геометрическая, определяемая характером связи между компонентами тензора деформаций и производными от вектора смещения энергии по координатам и независимая от физических характеристик среды [2]-[3].

В дальнейшем под структурной характеристикой биоткани будет пониматься физическая нелинейность.

## 1 Метод определения акустического нелинейного параметра на основе физической модели

Для определения акустического нелинейного параметра, как характеристики физической нелинейности биологической среды, рассмотрим систему уравнений Эйлера для диссипативной среды:

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla p' - \eta \Delta v - \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right) \text{grad div } v = -\rho' \frac{\partial v}{\partial t} - (\rho_0 + \rho') (v \nabla) v, \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div } v = -\text{div}(\rho' v), \\ p' = c_0^2 \rho' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right) \rho'^2 = C_1 \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{1}{2} C_2 \left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2. \end{cases} \quad (1)$$

Из системы уравнений (1) представим третье уравнение (уравнение состояния) в следующем виде:

$$P = P(\rho) = P_0 + P_0 A \left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right) + \frac{1}{2} P_0 B \left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2, \quad (2)$$

где  $P$  – мгновенное значение акустического давления,  $P_0$  – равновесное значение давления,  $\rho' = \rho - \rho_0$  – возмущение плотности среды. Под коэффициентами  $A$  и  $B$  понимаются следующие выражения:

$$A = \frac{\rho_0}{P_0} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{s, \rho=\rho_0}, \quad B = \frac{\rho_0^2}{P_0} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{s, \rho=\rho_0} \quad (3)$$

Полученные коэффициенты рассчитаны при условиях постоянства энтропии и равновесного значения плотности. Отсюда получаем соотношение коэффициентов  $B/A$  в следующем виде:

$$\frac{B}{A} = \frac{\rho_0}{c^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{s, \rho=\rho_0} \quad (4)$$

Отношение (4) является физической нелинейностью, которую можно получить из уравнения состояния системы уравнений (1), используя эмпирическое уравнение Тэта:

$$p = P_* \left[ \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\Gamma - 1 \right], \quad (5)$$

где  $P_*$  и  $\Gamma$  величины, получаемые в результате экспериментальных измерений для каждой среды, причем под параметром  $\Gamma$  понимают акустический нелинейный параметр.

На основе рассмотренных подходов к определению физической нелинейности в дальнейшем в качестве акустического нелинейного параметра будем понимать следующие величины:  $B/A$ ,  $\Gamma$  (или  $\gamma$ ),  $\varepsilon$ .

Все перечисленные величины определяют физическую нелинейность, то есть нелинейность уравнения состояния вещества, и имеют простую связь друг с другом [4]:

связь между  $\varepsilon$  и  $\Gamma$ :

$$\varepsilon = (\Gamma + 1)/2, \quad (6)$$

связь между  $B/A$  и  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = 1 + B/2A, \quad (7)$$

связь между  $\Gamma$  и  $B/A$ :

$$B/A = \Gamma - 1. \quad (8)$$

Выражение (6) лежит в основе всех математических моделей, описывающих нелинейные эффекты, возникающие в результате взаимодействия акустических волн с биологическими объектами.

## 2 Визуализация структур на основе нелинейных эффектов взаимодействия акустических волн с биологическими тканями

Системы акустической визуализации различных сред в своей основе построены на использовании параметрического взаимодействия акустических волн и регистрации высших гармоник зондирующего излучения.

Параметрическое взаимодействие лежит в основе схем восстановления акустического нелинейного параметра путём регистрации амплитуд комбинационных суммарных или разностных частот [4].

По совокупности восстанавливаемых параметров предпочтительнее использование суммарной частоты, однако, использование разностных частот дает возможность уменьшить уровень поглощения акустической волны.

В общем случае на основе параметрического взаимодействия акустический нелинейный параметр регистрируется в виде зависимости  $\tilde{\varepsilon}(K_{\pm})$ , где акустический нелинейный параметр зависит от пространственных векторов комбинационных суммарных или разностных частот  $K_{\pm}$  [5]-[7].

При разработке технической реализации параметрических систем возникла проблема появления избыточных данных, возникающих при регистрации комбинированных частот  $\omega_1, \omega_2$  в процессе измерения  $\tilde{\varepsilon}(K)$  – вектора акустического нелинейного параметра [8].

Кроме избыточности получаемой информации, еще одним ограничением параметрических систем является зависимость от расположения приёмно-излучающей системы относительно объекта исследования.

Гармонические составляющие акустической волны позволяют устранить зависимость от геометрии измерений.

Возникновение гармонических составляющих объясняется влиянием вторичных источников колебаний, характеризующихся совокупностью частот, кратных основной частоте, принятой от датчика. При анализе процесса генерации гармоник исходят из спектрального подхода к описанию нелинейных процессов. В этом случае уровень амплитуды гармонической составляющей и соответствующий ей нелинейный параметр приводит к искажению профиля акустической волны основной частоты, который оценивается по амплитуде колебательной скорости частиц среды.

Для описания генерации гармонических составляющих уравнение состояния из системы (1) решают относительно колебательной скорости, считая, что правая часть не равна 0:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = L_2(v^2) + L_3(v^3) + L_4(v^4) + \dots, \quad (9)$$

где  $L_2(v^2)$  – квадратичные нелинейные члены,  $L_3(v^3)$  – кубические нелинейные члены,  $L_4(v^4)$  – нелинейные члены четвертого порядка. Количество слагаемых в правой части определяется необходимой точностью приближения получаемого решения:

В явном виде  $L_2(v^2)$ :

$$L_2(v^2) = - \left[ v^2 + \frac{\gamma - 1}{2c_0^3} \left( \int \frac{\partial v}{\partial t} dx \right)^2 \right]_{xt}. \quad (10)$$

Для того чтобы перейти от анализа искажения профиля к оценке величины нелинейного параметра используем метод последовательных приближений, приняв, что нелинейные составляющие малы по сравнению с линейными. Для этого в выражении (9) будем считать колебательную скорость как:

$$v = v^{(1)} + v^{(2)} + v^{(3)} + \dots \quad (11)$$

С учётом граничных условий для случая генерации гармоники решение уравнения (11) получим в виде:

$$v^{(1)} = v_0 \sin \omega \left( t - \frac{x}{c_0} \right). \quad (12)$$

Полученное решение (12) подставим в волновое уравнение (9) и получаем следующий вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = L_2 \left[ v_0^2 \sin^2 \omega \left( t - \frac{x}{c_0} \right) \right] + L_3 \left[ v_0^3 \sin^3 \omega \left( t - \frac{x}{c_0} \right) \right] \dots \quad (13)$$

Из уравнения (13) следует, что при ограничении вторым приближением разложения функций вторичных источников происходит генерация не только волны второй гармоники  $2\omega$ , но и появляется постоянная составляющая  $\omega - \omega = 0$ .

Возникновение третьей гармоники обусловлено влиянием нелинейного параметра третьего порядка  $L_3$ . Как и в случае нелинейности второго порядка здесь также на волну основной частоты оказывает влияние добавка  $\omega + \omega - \omega = \omega$ .

Гармоники более высоких порядков в акустической волне генерируются аналогичным образом под влиянием нелинейности четвертого и более высокого порядков.

Гармоники более высокого порядка, определяющиеся более точным приближением уравнения (9), позволяют проводить оценку величины нелинейного параметра с большей точностью. Но в тоже время технически пока это не представляется возможным, так как уровень возникающих гармоник очень мал, и, следовательно, в спектре регистрируемого сигнала они будут слабо выражены. Поэтому целесообразным представляется использование акустического нелинейного параметра второго порядка для построения более качественных систем акустической визуализации.

В дальнейшем ограничимся только нелинейностью второго порядка. Согласно теории возмущения, в данном случае в спектре генерируемого излучения получаем следующие волны:  $2\omega = \omega + \omega$ ,  $0 = \omega - \omega$ , в третьем порядке – волны  $2\omega + \omega = 3\omega$ ,  $2\omega - \omega = \omega$ , то есть третью гармонику и нелинейную добавку к основной волне, а также происходят процессы генерации волн  $2\omega + 2\omega = 4\omega$ ,  $2\omega - 2\omega = 0$ ,  $0 + 2\omega = 2\omega$  [10].

Таким образом квадратичная нелинейность вносит вклад в спектр волны основной частоты, состоящий из волн с частотами  $0$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$ ,  $4\omega$  и выше.

Далее рассмотрим особенности генерации второй гармоники акустических волн в диссипативных средах, к которым относятся и биологические среды.

### 3 Особенности генерации второй гармоники акустической волны в биологической среде

При построении систем акустической визуализации необходимо исследовать особенности формирования акустических полей, формируемых в неоднородных слоистых средах, которыми являются биоткани организма. Наличие неоднородностей по различным параметрам приводит к изменению параметров регистрируемого акустического поля.

Неоднородностями могут быть как граница раздела сред, отличающихся по значению акустического нелинейного параметра, отдельный слой патологической ткани.

Таким образом при рассмотрении слоистой структуры биологических тканей возникает необходимость оценки степени влияния характеристик тканей на формируемое поле акустического давления второй гармоники. Для данной оценки необходимо рассмотреть задачу генерации и распространения высших гармоник в биологическом объекте, представляющим собой систему слоёв как с различными акустическими характеристиками, так и содержащую неоднородности этих параметров.

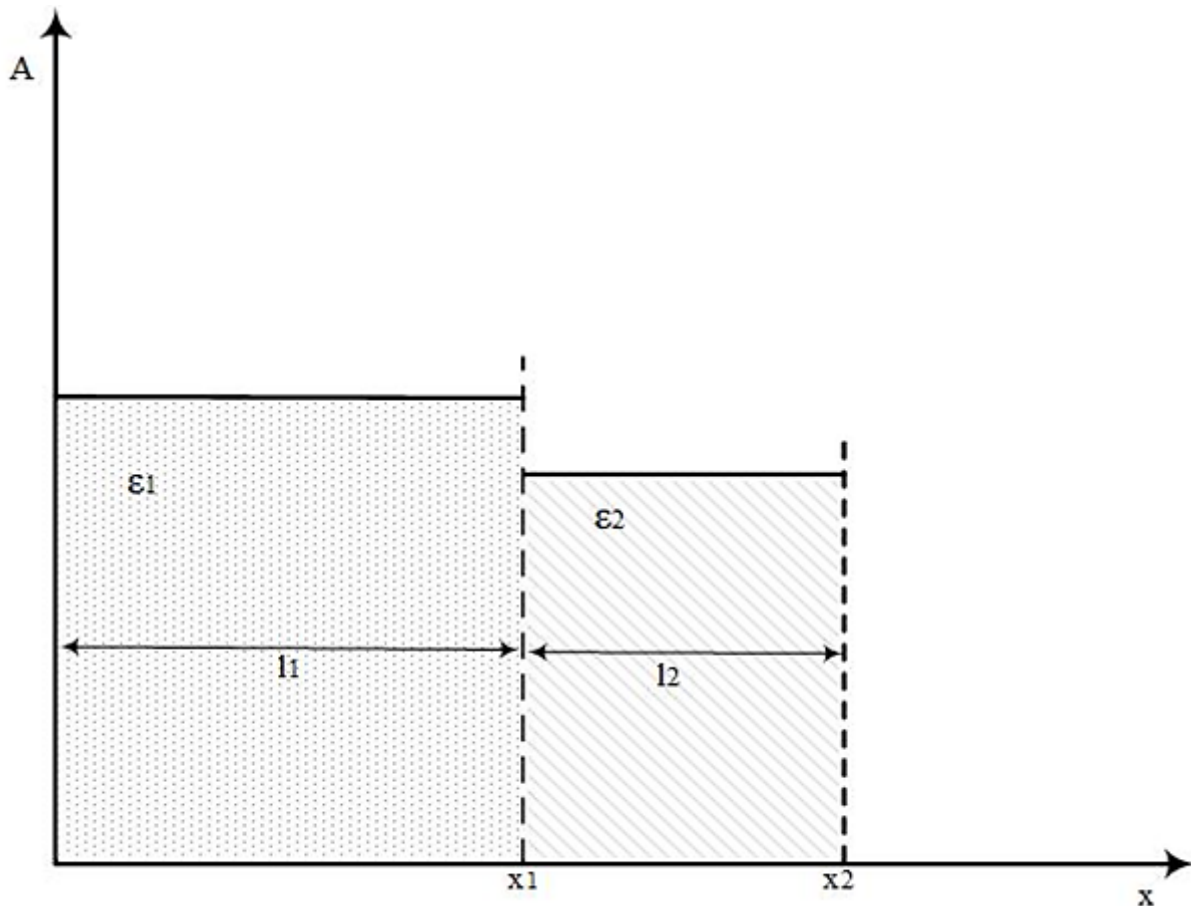


Рисунок 1 – Двухслойная модель биологического объекта

На рисунке 1 показана модель двухслойной биологической ткани, слои которой различны по акустическому нелинейному параметру  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Значения этих величин определяют уровень амплитуды ( $A$ ) регистрируемого сигнала. Слои, толщинами  $l_1$  и  $l_2$ , расположены на соответствующих расстояниях  $x_1$  и  $x_2$ .

Для определения параметров  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  воспользуемся уравнением Бюргера, учитывающем диссипативные процессы:

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^4 \rho_0} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} = 0. \quad (14)$$

Чтобы провести анализ влияния нелинейных и диссипативных эффектов на характер распространения акустической волны переведем выражение (14) в безразмерный вид:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma} - \Pi \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = \Gamma \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2}, \quad (15)$$

где  $\Pi = p'/p$ ,  $\theta = \omega\tau$ ,  $\sigma = x/lp$ ,  $\Gamma = b\omega/2\varepsilon p$ ,  $p$  – амплитуда давления акустической волны на излучателе. Значение параметра  $\Gamma$  в данном случае определяет соотношение влияния диссипативных и нелинейных эффектов на генерацию спектральных составляющих.

Для случая гармонического сигнала решение уравнения (15) представляют следующим образом:

$$U = \frac{1}{2\sqrt{\pi\Gamma\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{2\Gamma} \left[ \int_0^{\theta'} \Pi(\sigma=0, \theta'') d\theta'' - \frac{(\theta - \theta')^2}{2\sigma} \right] \right\} d\theta', \quad (16)$$

где  $\Pi(\sigma=0, \theta^n) = s_{in}\theta$  – исходный профиль возмущения.

В этом случае выражение (16) принимает вид:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (-1)^n I_n(1/2\Gamma) \exp(-n^2\sigma\Gamma) \cos(n\theta), \quad (17)$$

где  $\beta_0 = 1$ ,  $\beta_n = 2$ , для всех  $n > 0$ ,  $n$  – порядковый номер гармонической составляющей акустической волны.

Согласно данному решению, степень затухания гармоники зависит от её порядкового номер: гармоники высших порядков будут затухать быстрее, чем гармоника 2-го порядка. На амплитуду регистрируемого сигнала влияют как начальные параметры зондирующего излучения, так и соотношение параметра  $\Gamma$ , по значению которого определяют уровень влияния нелинейных и диссипативных процессов на возникновение гармоники сигнала [11].

Таким образом данное уравнение имеет два точных решения, соответствующих предельным значениям параметра  $\Gamma$ .

С точки зрения математической оценки влияния нелинейных свойств биотканей на процесс распространения УЗ волны, нас интересует случай малых значений  $\Gamma \ll 1$ , когда наблюдается сильное проявление нелинейности и возрастает зависимость амплитуды от свойств нелинейной среды:

$$\Pi = 4\Gamma \exp(-\sigma\Gamma) \sin(\theta),$$

$$p'(x) = \frac{2b\omega}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{x}{l_3}\right) \sin(\theta). \quad (18)$$

В данном случае на расстоянии  $x > 2l_3$  происходит «насыщение», сопровождающееся ограничением амплитуды. Это означает, что на таком расстоянии при увеличении начальной мощности мы добьемся лишь роста нелинейных потерь. Решение для зоны насыщения не позволяет проследить динамику развития нелинейных

эффектов. Поэтому для изучения нелинейности целесообразно будет рассмотреть частную задачу распространения очень мощной волны. В таком случае диссипативным членом в уравнении Бюргера можно пренебречь:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma} - \Pi \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0. \quad (19)$$

Таким образом мы имеем возможность не учитывать потери энергии, связанные с вязкостью и теплопроводностью. Для случая гармонического сигнала удобно записать (19) в виде неявной функции [12]-[13]:

$$\Pi = \sin(\theta + \sigma \Pi). \quad (20)$$

Процесс генерации спектральных составляющих в результате анализа решений уравнений Бюргера можно разделить на 4 этапа.

На первом этапе волна представляется гармонической, в ней присутствует одна спектральная составляющая, соответствующая основной гармонике. Далее, на втором этапе за счет нелинейных свойств биологических тканей происходит накопление нелинейного искажения, сопровождающееся обогащением спектральной составляющей, вплоть до приобретения профилем пилообразной формы. Третий этап соответствует моменту образования разрыва, при этом резко увеличивается влияние диссипативных эффектов, что приводит к затуханию все гармонических составляющих. Четвертый этап соответствует процессу затухания гармонической волны основной частоты. Из-за накапливающегося характера нелинейности будет оказывать существенное влияние даже при малых числах Маха.

Для анализа решения (20) запишем его, разложив в Фурье-спектр:

$$\Pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_n(\sigma)}{n\sigma} \sin(\theta). \quad (21)$$

По выражению (21) можно проследить генерацию и распространение отдельных гармоник акустического сигнала в биологической среде. Суммарная энергия излучения в таком случае остается постоянной и происходит быстрое перекачивание энергии из первой в высшие гармоники вплоть до расстояния разрыва. После образования пилообразного фронта решение становится неоднозначным и возникает необходимость учета диссипативных процессов.

На рисунке 2 показаны этапы распространения второй гармоники, где показаны следующие участки:

- рост амплитуды второй гармоники, величина которого зависит от нелинейного параметра (участок 1);
- расстояние разрыва (участок 2);
- преобладание диссипации над нелинейностью (участок 3).

На участке после образования расстояния разрыва вторая гармоника несет энергетические потери, в результате чего получить распределение акустического нелинейного параметра невозможно.

Таким образом, для построения математической модели получения акустического нелинейного параметра в точке биологического объекта, будет рассматриваться участок до образования разрыва, описываемого следующим выражением:

$$p = p_0 \sin \left\{ \omega \left[ t - x \left( \frac{1}{c} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho_0} \right) \right] \right\}. \quad (22)$$

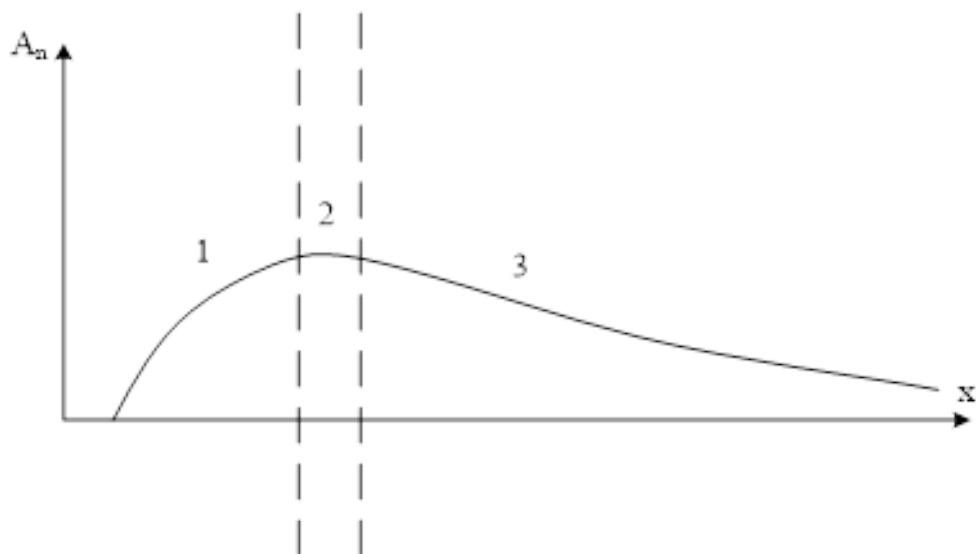


Рисунок 2 – Динамика изменения амплитуды второй гармоники

На основе приведенного уравнения (22) проводится оценка амплитуды второй гармоники акустической волны, значение которой соответствует значению акустического нелинейного параметра в точке [14]-[15].

На основе выражения (22) было проведено математическое моделирование второй гармоники акустической гармоники (рисунок 3).

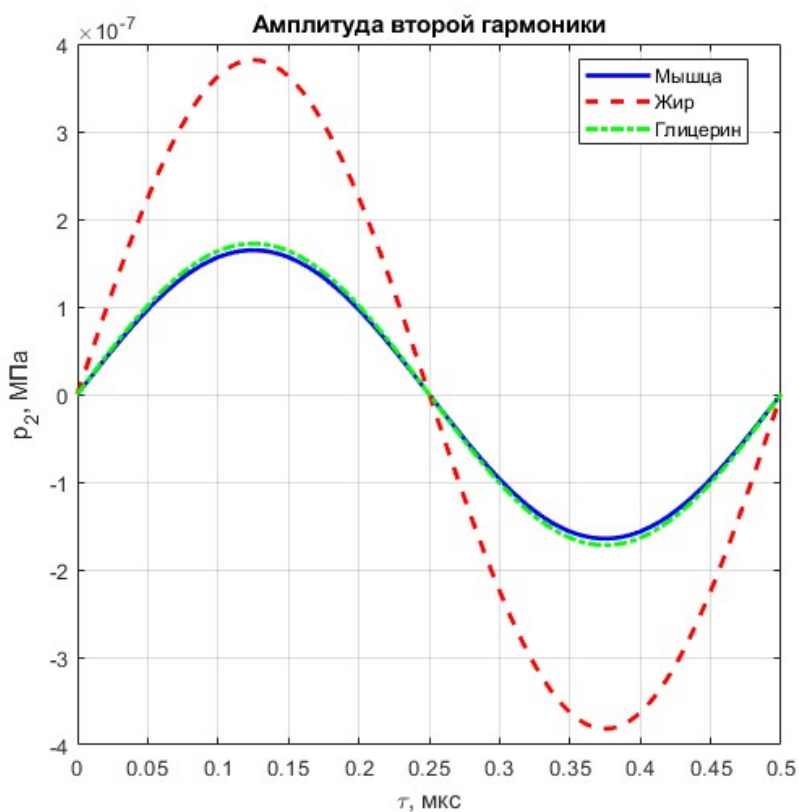


Рисунок 3 – Значение амплитуд второй гармоники для мышечной ткани, жировой ткани и глицерина

По результатам моделирования, представленном на рисунке 3, можно прийти к выводу, что в глицерине и мышечной ткани наблюдается практически одинаковый уровень второй гармоники, а, следовательно, и значения акустического нелинейного параметра, что дает возможность использовать глицерин для дальнейших исследований в качестве модели мышечной ткани.

Также была проведена оценка зависимости уровня второй гармоники акустического сигнала от толщины исследуемого слоя (рисунок 4).

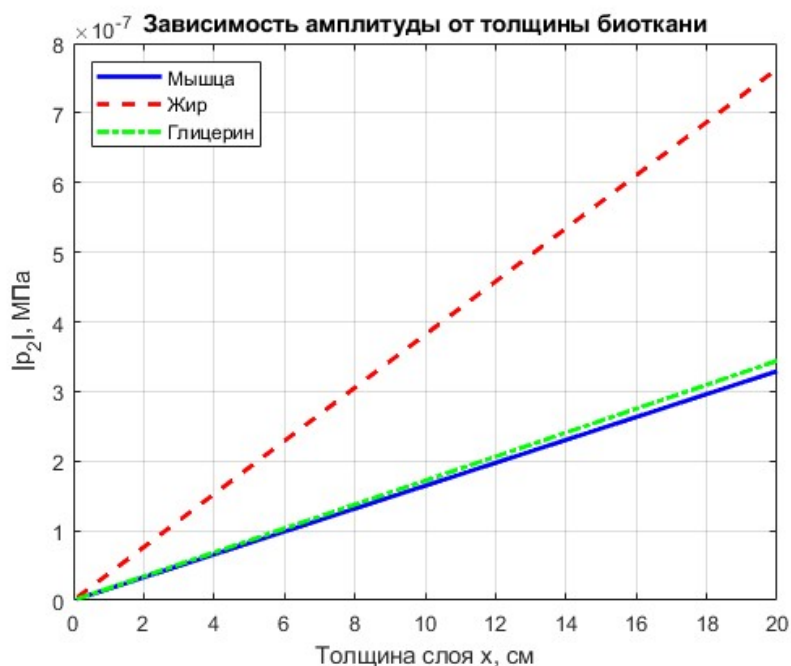


Рисунок 4 – Зависимость уровня второй гармоники от толщины слоя

Полученные результаты позволяют говорить о дальнейшей возможности применения тканевых гармоник для построения систем акустической визуализации биологических объектов.

## Заключение

На основе рассмотренных особенностей физической нелинейности, как структурной характеристики вещества, а также генерации гармонических составляющих были получены зависимости для определения акустического нелинейного параметра в биологических средах с учётом их диссипативных свойств. Для более точной оценки величины нелинейного параметра второго порядка описаны основные участки волны тканевой гармоники в диссипативной среде для случая преобладания нелинейных эффектов.

Получены зависимости амплитуды второй гармоники акустической волны для различных сред, в результате чего отмечено, что глицерин может быть достаточно точной моделью мышечной ткани не только с точки зрения линейного приближения, но и с точки зрения нелинейных свойств. Также получены уровни регистрируемого сигнала второй гармоники в зависимости от толщины исследуемого объекта.

По результатам работы определена модель для получения акустического нелинейного параметра в точке биологического объекта.

## Список использованных источников

1. Gan, W.S. Applications of Nonlinear Acoustical Imaging and Conclusions. // Nonlinear Acoustical Imaging. Springer, Singapore. – 2021. – [Электронный ресурс]. – URL [https://doi.org/10.1007/978-981-16-7015-2\\_11](https://doi.org/10.1007/978-981-16-7015-2_11) (дата обращения 25.04.2026)
2. Anastasiia Panfilova; Ruud J. G. van Sloun; Hessel Wijkstra; Oleg A. Sapozhnikov; Massimo Mischi // A review on B/A measurement methods with a clinical perspective J. Acoust. Soc. Am. 149, 2200–2237 (2021). [Электронный ресурс]. – URL <https://doi.org/10.1121/10.0003627> (дата обращения 25.04.2026)
3. Tiwari R. K., Verma V., Awasthi A., Trivedi S. K., Pandey P. K., Awasthi A. Comparative study of acoustic non-linearity parameter in binary mixtures of N, N-dimethylacetamide with Polyethylene Glycols at different temperatures // Journal of Molecular Liquids. 2021. Vol. 343. P. 117707. DOI: 10.1016/j.molliq.2021.117707. [Электронный ресурс] – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167732221024326?via%3Dihub> (дата обращения 26.04.2026)
4. Буров В.А., Евтухов С.Н., Ткачева А.М., Румянцева О.Д. Акустическая томография нелинейного параметра с помощью малого числа преобразователей // Акустический журнал. – 2006 – № 6. – С. 760-776.
5. Буров В.А., Шмелев А.А. Численное и физическое моделирование процесса томографирования на основе акустических нелинейных эффектов третьего порядка // Акустический журнал. – 2009 – №4-5. С. 466-480.
6. Буров В.А., Крюков Р.В., Румянцева О.Д., Шмелев А.А. Проблемы использования нелинейных коллинеарных процессов в акустической томографии третьего порядка // Акустический журнал. – 2012 – № 1. С.57-79.
7. Буров В. А., Шмелев А.А., Зотов Д.И. Прототип томографической системы, использующей акустические нелинейные эффекты третьего порядка // Акустический журнал. – 2013. – №1. С.31-51.
8. Вареникова А.Ю., Чернов Н.Н., Тарасов С.П. Особенности прохождения акустических волн через биологические среды с учетом нелинейности // Noise Theory and Practice. – 2025 Т. 11, №2 – С. 26-39
9. Zotov, D.I., Rummyantseva, O.D. & Cherniaev, A.S. Calculating Fields Scattered by an Inhomogeneous Area with a Large Wave Size. Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 88, 113–118 (2024). [Электронный ресурс] – URL: <https://doi.org/10.1134/S106287382370507X> (дата обращения 25.04.2026)
10. Р. Н. Беленьков, Е. Б. Постников, Подход к расчету параметра нелинейности ультразвуковых волн в жидкости, основанный на масштабной теории термодинамических флуктуаций давления, Известия вузов. ПНД, 2023, том 31, выпуск 1, 45–62
11. Kaltenbacher B., Rundell W. On the identification of the nonlinearity parameter in the Westervelt equation from boundary measurements // Inverse Problems & Imaging. 2021. Vol. 15, no. 5. P. 865–891. DOI: 10.3934/ipi.2021020.
12. Ali R, Mitcham T and Duric N 2023 Impact of starting model on waveform inversion in ultrasound tomography // Proc. SPIE vol 12470 Medical Imaging 2023: Ultrasonic Imaging and Tomography Ed C Boehm and N Bottenus (United States: SPIE) p 124700J [Электронный ресурс] – URL: <https://www.spiedigitallibrary.org/conference-proceedings-of-spie/12470/124700J/Impact-of-starting-model-on-waveform-inversion-in-ultrasound-tomography/10.1117/12.2653575.short> (дата обращения 29.04.2026)
13. Lonnie Daniel Chien, John M. Cormack, E. Carr Everbach, Mark F. Hamilton // Determination of nonlinearity parameter B/A of liquids by comparison with solutions of the three-dimensional Westervelt equation. Proc. Mtgs. Acoust. 29 November 2021; 45 (1):

020003. [Электронный ресурс] – URL: <https://doi.org/10.1121/2.0001563> (дата обращения 29.04.2026)

14. Chernov N.N., Zagray N.P., Laguta M.V., Varenikova A.Yu. Research of appearance and propagation of higher harmonics of acoustic signals in the nonlinear media // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018 г. 1015(3),032081.

15. Вареникова А.Ю., Чернов Н.Н. Разработка модели получения акустического нелинейного параметра для визуализации внутренних структур биологических сред // *Научное приборостроение: Перспективы разработки, создания, развития и использования. Материалы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Ростов-на-Дону – 2024 – С.303-305*

## References

1. Gan, W.S. Applications of Nonlinear Acoustical Imaging and Conclusions. // *Nonlinear Acoustical Imaging*. Springer, Singapore. – 2021. – [Electronic resource]. – URL [https://doi.org/10.1007/978-981-16-7015-2\\_11](https://doi.org/10.1007/978-981-16-7015-2_11) (date of the application 25.04.2026)

2. Anastasiia Panfilova; Ruud J. G. van Sloun; Hessel Wijkstra; Oleg A. Sapozhnikov; Massimo Mischi // A review on B/A measurement methods with a clinical perspective *J. Acoust. Soc. Am.* 149, 2200–2237 (2021). [Electronic resource]. – URL <https://doi.org/10.1121/10.0003627> (date of the application 25.04.2026)

3. Tiwari R. K., Verma V., Awasthi A., Trivedi S. K., Pandey P. K., Awasthi A. Comparative study of acoustic non-linearity parameter in binary mixtures of N, N-dimethylacetamide with Polyethylene Glycols at different temperatures // *Journal of Molecular Liquids*. 2021. Vol. 343. P. 117707. DOI: 10.1016/j.molliq.2021.117707. [Electronic resource] – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167732221024326?via%3Dihub> (date of the application 26.04.2026).

4. Burov V.A., Evtukhov S.N., Tkacheva A.M., Rumyantseva O.D. Acoustic tomography of a nonlinear parameter using a small number of transducers // *Acoustical Journal*. – 2006 – No. 6. – Pp. 760-776. Burov V.A., Evtukhov S.N. Tkacheva A.M., Rumyantseva O.D. Acoustic tomography of a nonlinear parameter using a small number of transducers // *Acoustic Journal*, 2006, No. 6, pp. 760-776.

5. Burov V.A., Shmelev A.A. Numerical and physical modeling of the tomography process based on third-order acoustic nonlinear effects // *Acoustical Journal*. – 2009 – No. 4-5. Pp. 466-480.

6. Burov V.A., Kryukov R.V., Rumyantseva O.D., Shmelev A.A. Problems of using nonlinear collinear processes in third-order acoustic tomography // *Acoustical Journal*. – 2012 – No. 1. Pp. 57-79.

7. Burov V. A., Shmelev A.A., Zotov D.I. Prototype of a tomographic system using acoustic nonlinear effects of the third order // *Acoustic Journal*, 2013, No. 1, pp.31-51.

8. Varenikova A.Yu., Chernov N.N., Tarasov S.P. Features of the Passage of Acoustic Waves through Biological Media, Taking into Account Nonlinearity // *Noise Theory and Practice*. – 2025 V. 11, No. 2 – Pp. 26-39

9. Zotov, D.I., Rumyantseva, O.D. & Cherniaev, A.S. Calculating Fields Scattered by an Inhomogeneous Area with a Large Wave Size. *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.* 88, 113–118 (2024). <https://doi.org/10.1134/S106287382370507X>

10. R.N. Belenkov, E. B. Postnikov, An approach to calculating the parameter of nonlinearity of ultrasonic waves in a liquid based on a large-scale theory of thermodynamic pressure fluctuations, *Izvestiya vuzov. MON*, 2023, Volume 31, Issue 1, 45-62

11. Kaltenbacher B., Rundell W. On the identification of the nonlinearity parameter in the Westervelt equation from boundary measurements // *Inverse Problems & Imaging*. 2021. Vol. 15, no. 5. P. 865–891. DOI: 10.3934/ipi.2021020.
12. Ali R, Mitcham T and Duric N 2023 Impact of starting model on waveform inversion in ultrasound tomography // *Proc. SPIE vol 12470 Medical Imaging 2023: Ultrasonic Imaging and Tomography* Ed C Boehm and N Bottenus (United States: SPIE) p 124700J [Electronic resource] – URL: <https://www.spiedigitallibrary.org/conference-proceedings-of-spie/12470/124700J/Impact-of-starting-model-on-waveform-inversion-in-ultrasound-tomography/10.1117/12.2653575.short> (date of the application 29.04.2026).
13. Lonnie Daniel Chien, John M. Cormack, E. Carr Everbach, Mark F. Hamilton // Determination of nonlinearity parameter  $B/A$  of liquids by comparison with solutions of the three-dimensional Westervelt equation. *Proc. Mtgs. Acoust.* 29 November 2021; 45 (1): 020003. [Electronic resource] – URL: <https://doi.org/10.1121/2.0001563> (date of the application 29.04.2026).
14. Chernov N.N., Zagray N.P., Laguta M.V., Varenikova A.Yu. Research of appearance and propagation of higher harmonics of acoustic signals in the nonlinear media // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018 г. 1015(3),032081.
15. Varenikova A.Yu., Chernov N.N. Development of a model for obtaining an acoustic nonlinear parameter for visualization of internal structures of biological media // *Scientific Instrumentation: Prospects for Development, Creation, and Use. Materials of the All-Russian Scientific and Practical Conference with International Participation. Rostov-on-Don – 2024 – P.303-305*